

GEOMETRÍA ANALÍTICA  
para ciencias e Ingenierías

GEOMETRÍA  
ANALÍTICA

para ciencias e ingenierías

GEOMETRÍA  
ANALÍTICA

para ciencias e ingenierías

# GEOMETRÍA ANALÍTICA

## PROBLEMAS INTEGRADORES Y DE APLICACIÓN

GEOMETRÍA ANALÍTICA  
para ciencias e ingenierías

GEOMETRÍA  
ANALÍTICA

para ciencias e ingenierías

GEOMETRÍA  
ANALÍTICA

para ciencias e ingenierías

Silvia **RAICHMAN** - Eduardo **TOTTER** - Daniel **VIDELA**  
Liliana **COLLADO** - Florencia **CODINA**  
Gabriel **MOLINA** - Adrián **CASCONE** - Gisela **FITT**

qellqasqa editorial



# Geometría Analítica

para Ciencias e Ingenierías

## *Problemas Integradores y de Aplicación*

Mendoza, República Argentina

2022

Geometría analítica para Ciencias e Ingenierías : problemas integradores y de aplicación / Silvia Raichman ... [et al.]. - 1a ed - Guaymallén : Qellqasqa, 2022.  
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online  
ISBN 978-987-4026-62-0

1. Geometría Analítica. 2. Universidades. I. Raichman, Silvia  
CDD 516

Qellqasqa considera que los estándares científicos y editoriales de esta obra son adecuados y suficientes para la publicación en su plataforma en línea:

[www.qellqasqa.com](http://www.qellqasqa.com)

ISBN 978-987-4026-62-0

Mendoza, República Argentina.

Los derechos de esta edición pertenecen a los autores de los contenidos.



Obra disponible bajo [Licencia Creative Commons  
Atribución-No Comercial-Compartir Igual 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

# Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías

## *Problemas Integradores y de Aplicación*

Edición Digital



Silvia  
RAICHMAN

**Ingeniera Civil. Magister en Ingeniería Estructural. Especialista en Docencia Universitaria.**

Profesora Titular de las asignaturas *Geometría Analítica* y *Matemáticas Avanzadas*. Facultad de Ingeniería, Facultad Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Cuyo.

Profesora Titular de la asignatura *Cálculo Avanzado*, Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional.



Eduardo  
TOTTER

**Ingeniero Civil. Magister en Ingeniería Estructural.**

Profesor Adjunto de las asignaturas *Geometría Analítica*, *Matemáticas Avanzadas* y *Construcciones Metálicas y de Madera*. Profesor a Cargo de la Asignatura *Diseño Estructural 1*. Carrera de Arquitectura. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Cuyo. Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Cálculo Avanzado*, Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional.



Daniel  
VIDELA

**Ingeniero Civil.**

Profesor Adjunto de la asignatura *Geometría Analítica*. Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Construcciones y Montajes Industriales*. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.



Liliana  
COLLADO

**Profesora de Matemática, Física y Cosmografía.**

Jefe de Trabajos Prácticos de las asignaturas *Geometría Analítica* y *Matemática para Arquitectura*.

Coordinadora del Área Matemática del Ingreso a Facultad de Ingeniería. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.



Florencia  
CODINA

**Ingeniera Industrial.**

Jefe de Trabajos Prácticos de las asignaturas *Geometría Analítica* y *Cálculo I*. Facultad de Ingeniería, Facultad Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Cuyo.



Gabriel  
MOLINA

**Ingeniero Civil. Master en Ingeniería Mecánica y Civil.**

Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Geometría Analítica*. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.



Ignacio  
CASCONE

**Ingeniero Civil. Master en Geotecnia.**

Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura *Geometría Analítica*. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.



Gisela  
FITT

**Profesora de Matemática. Especialista en Didáctica de la Matemática.**

Jefe de Trabajos Prácticos de las asignaturas *Geometría Analítica* e *Introducción al Álgebra Lineal*.

Facultad de Ingeniería, Facultad Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Cuyo.

## *Prólogo de los Autores*

En este texto se presentan y desarrollan problemas de la geometría analítica plana y espacial. Está destinado a estudiantes y docentes de asignaturas afines pertenecientes a carreras científico tecnológicas, interesados en el desafío de integrar, aplicar y transferir contenidos en problemas de interés.

En el primer Capítulo se describe el modelo pedagógico de la asignatura Geometría Analítica de Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, y la motivación que condujo a la propuesta de este texto. Se presentan los problemas integradores y de aplicación que se desarrollan en los capítulos siguientes, así como también los requerimientos específicos de contenidos y las posibilidades de inserción en los distintos escenarios de interacción e interaprendizaje del modelo pedagógico.

En el Capítulo 2 se plantean y resuelven seis problemas de la geometría analítica plana, en tanto que en el tercero se desarrollan cuatro de la geometría analítica espacial. Cada uno de los problemas de ambos capítulos, cuenta en primer lugar con una breve descripción, junto con la indicación del nivel correspondiente teniendo en cuenta los requerimientos de contenidos conceptuales y procedimentales para su resolución: nivel básico, nivel intermedio y nivel avanzado. Así mismo, se indican las áreas temáticas específicas vinculadas al problema, las cuales pueden ser: ingeniería, arquitectura, diseño, computación, biometría, procesamiento de imágenes, robótica, sismología, máquinas y equipos. El desarrollo completo de cada problema se acompaña de gráficos, imágenes, tablas y sugerencias de resoluciones alternativas.

Los estudios realizados para la elaboración de este material se enmarcan dentro del Proyecto SIIP 2019 - Tipo I - 06/B382, de la Secretaría de Investigación, Internacionales y Posgrado de la Universidad Nacional de Cuyo. Los autores agradecen el apoyo recibido en el marco de dicho proyecto.

# ÍNDICE

## **CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN.**

- |      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1. | Modelo pedagógico de la asignatura Geometría Analítica.  | 7  |
| 1.2. | Problemas integradores en los escenarios de interacción. | 10 |

## **CAPÍTULO 2: PROBLEMAS BIDIMENSIONALES.**

- |      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1. | Diseño de una intersección de senderos peatonales. | 16 |
| 2.2. | Diseño de una zona de recreación.                  | 23 |
| 2.3. | Diseño de la portada de un libro de ciencias.      | 33 |
| 2.4. | Geometría de una tirolesa.                         | 37 |
| 2.5. | Modelos de reconocimiento facial.                  | 47 |
| 2.6. | Epicentro de un sismo.                             | 58 |

## **CAPÍTULO 3: PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES.**

- |      |   |    |
|------|---|----|
| 3.1. | Paraboloide hiperbólico como superficie reglada.          | 67 |
| 3.2. | Iluminación natural de un estadio polideportivo cubierto. | 73 |
| 3.3. | Movimientos de una grúa torre.                            | 87 |
| 3.4. | Configuraciones de robots industriales.                   | 94 |

## **REFERENCIAS.**

- |              |     |
|--------------|-----|
| Referencias. | 101 |
|--------------|-----|

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Modelo pedagógico de Geometría Analítica

Geometría Analítica es una asignatura del área matemática dentro del bloque de ciencias básicas de los planes de estudio de las carreras de Ingeniería y de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo. En la misma se plantea la resolución de problemas de la geometría analítica del plano y del espacio, necesarios para la formación básica de los estudiantes y para abordar temas específicos de las restantes áreas de los diseños curriculares. Se implementa un modelo pedagógico enmarcado dentro de la metodología de Investigación-Acción, constituido por diferentes escenarios de interacción [Raichman y Mirasso, 2018] tales que, a partir de una equilibrada y coherente articulación de actividades significativas de aprendizaje [Molina y Prieto Castillo, 1997] definidas en cada uno de ellos, favorezca en los estudiantes la apropiación de conceptos y procedimientos propios de la geometría analítica, así como también el desarrollo de capacidades asociadas a competencias genéricas del perfil profesional [CONFEDI, 2018]. A continuación, se describen sintéticamente dichos escenarios de interacción e interaprendizaje, los cuales habilitan la participación activa, comprometida y responsable de los estudiantes, promoviendo la comprensión profunda, el uso reflexivo y la transferencia del nuevo conocimiento.

#### 1.1.1. Escenarios de desarrollo de contenidos en Geometría Analítica

Los escenarios de desarrollo de contenidos están constituidos por las Aulas Teórico-Prácticas y las Aulas Taller [Raichman y Totter, 2008]. El eje del trabajo en el aula Teórico-Práctica lo constituye el desarrollo de contenidos conceptuales y procedimentales en clases sincrónicas participativas e interactivas, en el marco de la *enseñanza para la comprensión* [Perkins, 1999]. Las demostraciones, revisión de contenidos y resolución de problemas se elaboran en conjunto entre el docente y los estudiantes, en base a variados registros de representación y un trabajo de

preguntas y respuestas, alternando con variadas actividades bajo el enfoque del *aprendizaje activo* [Felder y Brent, 2003].

Por otra parte, el Aula-Taller constituye un escenario alternativo de interacción, donde se genera un modelo de trabajo en equipos desde la perspectiva del *aprendizaje colaborativo* [Felder y Brent, 2007], potenciando la comprensión profunda, la integración y la aplicación de contenidos y la transferencia de los mismos a situaciones que los acerquen a problemas reales. En cada grupo de Aula – Taller, los estudiantes trabajan divididos en equipos de 4 a 6 integrantes, resolviendo los problemas indicados por el docente, quien realiza el seguimiento permanente de los avances logrados [Raichman y Totter, 2008]. Las actividades son seleccionadas a partir de los materiales elaborados por el equipo docente. En algunos casos, la sesión de Aula-Taller se inicia con una actividad de recuperación de saberes previos en la que se entrega a los estudiantes un cuestionario de rápida resolución.

Se estimula a los estudiantes a realizar inferencias, generar hipótesis, formular preguntas, organizar ideas para luego explicarlas y justificarlas a los otros. Se promueve la comunicación oral a través de la exposición del desarrollo de la solución obtenida por parte de los representantes de cada equipo. Se alienta un trabajo de interacción y de discusión de diferentes caminos de solución del problema, no sólo hacia el interior de cada equipo, sino también entre los expositores y el resto de los estudiantes. Las exposiciones finalizan con las palabras del docente, quien señala aspectos relevantes de cada uno de las actividades realizadas y atiende inquietudes que puedan surgir. El debate moderado por el docente promueve la discusión de distintas vías de solución del problema, en un ambiente de trabajo ameno, con un alto nivel de compromiso y pertenencia [Raichman, et.al., 2014]. El estudiante, participe activo del proceso, se apropia del espacio en el cual es escuchado y respetado. Se genera así una comunidad de aprendizaje, con una cultura de trabajo propia y específica de cada Aula - Taller.

Los textos de cátedra constituyen valiosos y necesarios recursos para los escenarios de desarrollo de contenidos [Raichman y Totter, 2016; Raichman et.al., 2020; Raichman et.al., 2021].

### 1.1.2. Escenarios de tutorías en Geometría Analítica.

En la modalidad de trabajo de Aula - Taller de Geometría Analítica es posible incorporar las tutorías de pares. El rol asignado a los ayudantes alumnos es el de acompañar a los estudiantes en la apropiación de conceptos y procedimientos. En dicha tarea, es importante que el tutor par sea a su vez acompañado por el docente a cargo del Aula-Taller en su compromiso de guiar en la construcción reflexiva del conocimiento, planteando preguntas y estableciendo relaciones, que favorezcan la integración del nuevo conocimiento con los saberes previos. Se busca la reflexión individual del estudiante sobre el conocimiento y que la interacción con sus iguales promueva la profundización de saberes, la confrontación de percepciones y distintas vías de solución de los problemas que se plantean [Raichman, et.al., 2017].

### 1.1.3. Escenarios de exploración y experimentación en Geometría Analítica.

Los escenarios de experimentación y exploración se incluyen en actividades sincrónicas dentro de los escenarios de desarrollo de contenidos y en actividades asincrónicas en el escenario virtual de aprendizaje implementado en el *Aula Abierta de Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo*. Los recursos didácticos para la exploración y la experimentación se refieren tanto a las aplicaciones informáticas interactivas [Raichman et.al., 2021] que permiten al estudiante explorar libremente y trabajar según sus propios ritmos de estudio, como a los dispositivos experimentales [Raichman, et.al., 2018]. En el caso de estos últimos, se busca, mediante la manipulación, observación y exploración sobre objetos concretos, favorecer la apropiación de modelos matemáticos de los lugares geométricos en estudio. Las actividades diseñadas con estos recursos están destinadas a potenciar la comprensión y resolución de problemas en el espacio tridimensional.

### 1.1.4. Escenarios de articulación en Geometría Analítica.

Se realizan actividades de articulación con otras asignaturas: Análisis Matemático I, Cálculo Numérico y Computación, Análisis Matemático II, Estabilidad II e Introducción a la Programación [Raichman y Pacini, 2017]. Los recursos didácticos se refieren a las guías de trabajo específicas en las que se

plantean a los estudiantes las actividades a realizar en el marco de la articulación definida, o bien a los ejercicios acordados entre los responsables de las asignaturas y que son incluidos en las guías de trabajos prácticos. La generación de escenarios de articulación promueve el trabajo en equipo de docentes de diferentes espacios curriculares para el diseño e implementación de innovaciones educativas compartidas, diversificando los contextos de aprendizaje de un mismo conocimiento e incrementando así las vías para su recuperación.

### 1.1.5. Escenarios de integración de contenidos en Geometría Analítica.

A partir de la resolución de un problema integrador seleccionado se busca que los estudiantes: planifiquen y desarrollen estrategias para la resolución de problemas geométricos en base a la identificación de los datos, la representación de los mismos y el establecimiento de relaciones, integrando los conocimientos adquiridos en una situación concreta; analicen e interpreten resultados; sean metódicos en la exposición y en el registro de la información; se comuniquen con precisión y claridad en forma oral y escrita.

En los diferentes escenarios se integran actividades y recursos destinados a promover la autonomía en el aprendizaje y la metacognición [Raichman y Mirasso, 2018].

## 1.2. Problemas integradores en los escenarios de interacción.

### 1.2.1. Justificación de la propuesta.

J.J. Aparicio (1995) señala la importancia del sentido de la enseñanza de una determinada disciplina en función del contexto y de las necesidades específicas de la formación profesional. Allí menciona: "No se puede entender el sentido que la enseñanza de una disciplina pueda tener para el alumno si no se considera desde la perspectiva del uso que puede hacerse del conocimiento implicado en dicha disciplina". Destaca la necesidad de una reflexión sobre el sentido que el conocimiento de una disciplina pueda tener para los estudiantes a los efectos de enseñarla verdaderamente.

Por otra parte, las tendencias recientes de innovación en educación superior plantean el reto a los docentes de rediseñar sus prácticas y orientarlas hacia actividades y tareas que promuevan un acercamiento a la realidad mediante la resolución de problemas. El aprendizaje significativo se logra cuando los contenidos conceptuales y procedimentales de un espacio curricular se ejemplifican y aplican en situaciones reales que tienen sentido y utilidad potencial para los estudiantes [Verdejo y Freixas, 2009].

En base a la experiencia con el Trabajo Integrador de Contenidos de Geometría Analítica implementado en ciclos lectivos anteriores [Raichman *et.al.*, 2020], es posible afirmar que el estudiante asigna un elevado efecto motivador a la posibilidad de ejercer un rol activo en la resolución de problemas que le den sentido a lo que está estudiando. Así mismo se destaca la posibilidad de enriquecer el aprendizaje significativo a partir de la resolución gradual de un problema concreto al alcance de un estudiante de primer año, que promueva el uso simultáneo de contenidos integrándolos para lograr los objetivos de la situación planteada y que le ayude a tomar conciencia del potencial de las herramientas que está adquiriendo.

Existe poca disponibilidad en la literatura asociada a las ciencias básicas, y a la geometría analítica en particular, de problemas de aplicación en situaciones concretas que resulten de interés, tanto para docentes como para estudiantes, en el campo de las ciencias y de las ingenierías. Esto constituye una dificultad a la hora de generar situaciones de aprendizaje efectivas que contemplen los requerimientos mencionados anteriormente. Es así que este texto pretende contribuir en el desafío de diseñar problemas que integren diferentes temas de la geometría analítica plana y espacial, favoreciendo la transferencia del conocimiento a situaciones de interés en carreras científico-tecnológicas, a la vez que se encuentren en un nivel apropiado para el estudiante de los primeros años de dichas carreras.

### 1.2.2. Descripción del contenido y alcances del material.

Este texto complementa los textos mencionados anteriormente ([Raichman y Totter, 2016] y [Raichman *et.al.*, 2020]), incluyendo problemas integradores y de aplicación que promuevan la transferencia de los contenidos a situaciones apropiadamente contextualizadas, desafiando los procesos cognitivos de los estudiantes y acercándolos a las aplicaciones específicas de sus carreras. Los

problemas están asociados a los ejes temáticos del programa vigente de la asignatura Geometría Analítica de Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo [*Programa Geometría Analítica*, 2021].

En el Capítulo 2 se desarrollan seis problemas correspondientes a la geometría analítica plana. El primero de ellos trata sobre el diseño de una intersección de dos senderos peatonales existentes en un parque público, junto con un espacio destinado a la construcción de un monumento que será ubicado en el mismo bajo determinadas restricciones impuestas. La primera estrategia de resolución requiere del manejo de ecuaciones de circunferencias, parábolas, rectas y rectas tangentes, en tanto que en la segunda se utilizan conceptos asociados a rototraslación de secciones cónicas.

El problema 2 se refiere a la etapa de anteproyecto de un barrio residencial en la que es necesario diseñar áreas peatonales de forma elíptica con centro y excentricidades coincidentes con una laguna artificial elíptica existente en la zona de recreación. A partir del contorno de dicha laguna, los arquitectos diseñadores desean construir una pista de circulación peatonal y un área de entretenimiento y descanso con determinados requerimientos. Para la resolución de este problema se utilizan contenidos asociados a la descripción geométrica de elipses, así como también, contenidos conceptuales y procedimentales correspondientes a rototraslación y familias de elipses.

El tercer problema nos ubica en el Departamento de Diseño Gráfico de una empresa editorial, que se encuentra abocado al bosquejo de la portada de un libro de ciencias próximo a publicarse. La idea gráfica principal implica la representación de una espiral de Arquímedes cuyo origen se encuentre ubicado en el punto central de un espacio delimitado por las dimensiones de una hoja tamaño A5 según Normas IRAM. Bajo determinado criterio se solicita la presentación de tres propuestas para su análisis junto con la ecuación del lugar geométrico asociado y la determinación de puntos característicos de los mismos. Los prerrequisitos cognoscitivos para la resolución de este problema, son los asociados a ecuaciones de curvas en coordenadas polares y su representación gráfica.

El problema 4 trata sobre la geometría de una tirolesa en un espacio geográfico dado por la presencia de picos y un bosque. A partir de determinados datos que incluyen la distancia entre las bases de las torres de fijación, se plantea

la necesidad de encontrar la ecuación que define los puntos de la trayectoria de la tirolesa y determinar el punto de máxima velocidad que alcanzaría la misma. Así mismo se requiere verificar que la velocidad máxima no supere determinado valor y que la trayectoria no sea interrumpida por el bosque. Para la resolución de este problema se utilizan contenidos asociados a la descripción geométrica y analítica de elipses, rototraslación de secciones cónicas y conceptos básicos de física.

En el problema 5 se plantea la necesidad de diseñar un programa computacional para un sistema de seguridad que permita el reconocimiento facial de un individuo y logre identificarlo a partir de una base de datos. El principal objetivo es optimizar el proceso de búsqueda mediante la reducción del tiempo y costo computacional, para que el programa sea útil incluso con bases de datos extensas. Se analizan dos alternativas posibles para las cuales se requieren conocimientos de coordenadas polares, ecuaciones de lugares geométricos en coordenadas polares, así como también el cálculo de ángulos y distancias.

El sexto problema se refiere a la localización del punto sobre la superficie de la Tierra que se encuentra sobre la proyección vertical del hipocentro o foco, punto bajo la superficie donde se origina un sismo. Se plantea para ello la utilización del denominado método de los círculos. En base a información registrada por determinados acelerógrafos de la Red Nacional de Acelerógrafos, se calcula la distancia a la que se encuentra la fuente y a partir de dicha distancia se localiza el epicentro del evento sísmico. Para este problema se requieren contenidos conceptuales y procedimentales asociados a circunferencias, familias de circunferencias, intersecciones entre lugares geométricos y cálculo de distancias.

En el Capítulo 3 se desarrollan cuatro problemas correspondientes a la geometría analítica espacial. El primero de ellos trata sobre la determinación analítica de la familia de rectas que generan un paraboloides hiperbólico. Para la resolución del mismo son necesarios los siguientes requisitos cognoscitivos previos: rectas en el espacio tridimensional, rectas alabeadas, familias de rectas en  $\mathbb{R}^3$ , descripción geométrica y analítica de un paraboloides hiperbólico genérico e intersecciones entre lugares geométricos en  $\mathbb{R}^3$ .

El estudio de las condiciones de iluminación natural en espacios cerrados a través de la determinación de aberturas constituye un aspecto de interés en

Arquitectura e Ingeniería. En el problema 8 se cuenta con información referida a la cubierta cilíndrica constituida por arcos parabólicos de un estadio deportivo de usos múltiples. La cubierta del estadio posee un tragaluz y es necesario realizar el estudio de las condiciones de iluminación natural dentro del recinto, tanto en invierno como en verano. Para la resolución de este problema se requiere el dominio de los siguientes contenidos: vectores, operaciones con vectores; parábolas; rectas en  $\mathbb{R}^3$ ; planos; superficies cilíndricas; intersección entre lugares geométricos en  $\mathbb{R}^3$ ; rototraslación; cálculo de áreas y de volúmenes.

En un puerto marítimo comercial, se cargan y descargan de los barcos las mercancías transportadas en contenedores, utilizando grúas torre. Los puntos de carga y descarga, así como los movimientos y trayectorias que debe realizar la grúa, pueden describirse de manera precisa utilizando conceptos de la geometría analítica. En el noveno problema se presenta la descripción de movimientos que puede realizar el gancho de una grúa torre que transporta cargas, para lo cual se requiere el dominio de contenidos conceptuales y procedimentales asociados a: vectores, operaciones con vectores y sistema de coordenadas cilíndricas.

A los efectos de estudiar la cinemática de un sistema de automatización, es necesario describir las posiciones de la herramienta terminal de robots industriales dados por distintos tipos de configuraciones. En el décimo problema se plantea la determinación de la posición de la herramienta terminal de un robot para el tipo de configuración cilíndrica y para la configuración polar. Se considera un caso particular de un robot de configuración cilíndrica utilizado en una fábrica automotriz para el proceso de pintado de carrocería. La adecuada resolución de este problema requiere de contenidos conceptuales y procedimentales asociados a: sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas; vectores, operaciones con vectores; ecuaciones de planos; distancia de un punto a un plano; rectas en  $\mathbb{R}^3$ .

Dentro de las numerosas posibilidades de inserción de los problemas integradores en los escenarios de interacción e interaprendizaje, se mencionan a modo de ejemplos las siguientes:

- Seleccionar problemas que sirvan a modo descriptivo para motivar y/o introducir nuevos ejes temáticos, tanto en actividades sincrónicas como en materiales específicamente diseñados para tal fin, que incluyan la presentación de los problemas.

- Seleccionar total o parcialmente determinados problemas para incluirlos en intervenciones educativas sincrónicas o asincrónicas, individuales o grupales, a incluir en los escenarios de desarrollo de contenidos, o bien en los escenarios de exploración y experimentación, a partir del diseño de recursos interactivos específicos.
  
- Seleccionar uno de los problemas a los efectos de que se constituya en la base para un trabajo integrador de contenidos que sirva como eje en torno del cual se desarrollan las actividades teórico-prácticas de la asignatura, formando parte el escenario de integración e investigación.

# CAPÍTULO 2

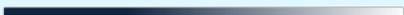
## PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

### 2.1.

#### Problema 1. Diseño de una intersección de senderos peatonales.

Se desea diseñar los enlaces geométricos entre dos senderos peatonales existentes en un parque público, junto con un espacio destinado a la construcción de un monumento que será ubicado en el mismo.

**Área Temática:** Ingeniería. Arquitectura. Diseño.

**Nivel:** INTERMEDIO 

#### Descripción del problema.

Un equipo de arquitectos paisajistas está a cargo del proyecto de remodelación y puesta en valor de un parque público. Éste plantea la necesidad de diseñar los enlaces correspondientes a dos senderos peatonales existentes en el lugar y un nuevo espacio de forma circular, destinado a la construcción de un monumento que será erigido en la intersección de dichos senderos.

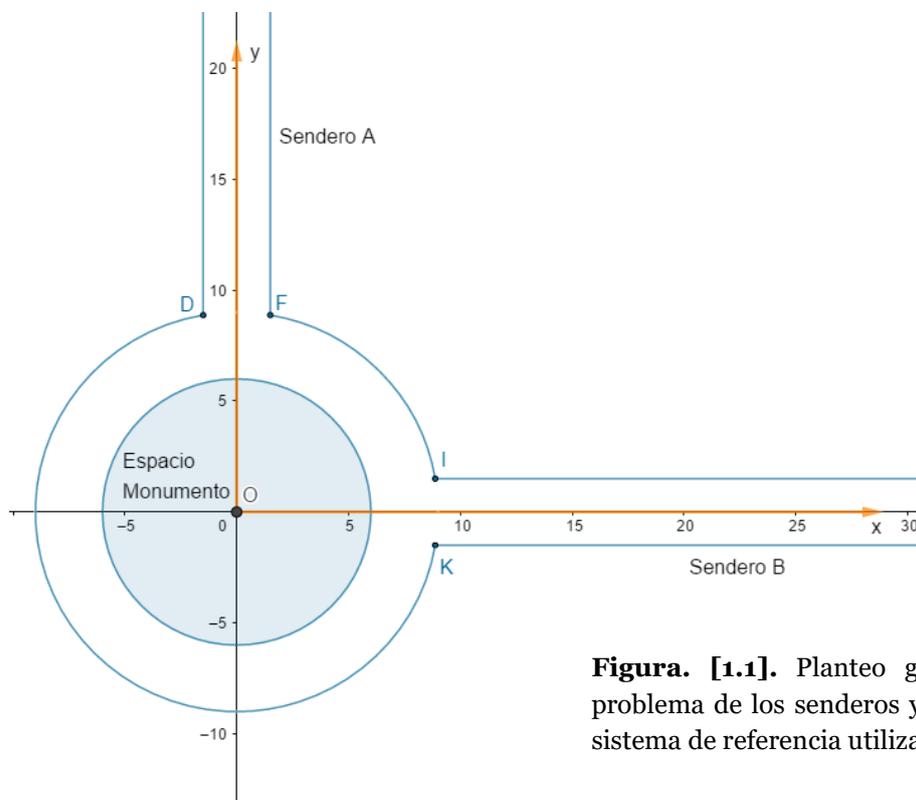
Por directivas de proyecto, el espacio destinado al monumento debe poseer un sendero peatonal que lo rodee, a los efectos de permitir la circulación de los paseantes en todo su perímetro logrando, de este modo, la observación del monumento en todos sus ángulos.

**1.a.** Sean dos senderos peatonales existentes de 3.00m de anchura total perpendiculares entre sí. Disponga geoméricamente un espacio circular libre de 12m de diámetro destinado al monumento, con centro en la intersección de los ejes de los senderos mencionados. Diseñe una nueva circulación de 3m de ancho que rodee el espacio destinado al monumento. Represente gráficamente.

### Desarrollo de la solución.

A los efectos de definir geoméricamente el problema a resolver y permitir el posterior replanteo del mismo en el terreno, se selecciona un sistema de referencia cartesiano, paralelo a los ejes de los senderos existentes y de origen coincidente con el centro del espacio circular destinado al futuro monumento.

A partir del mismo, se plantea una circunferencia con el diámetro especificado por los paisajistas y luego una nueva circunferencia concéntrica con la anterior, que materializa la circulación que rodea al monumento y permite a los paseantes admirar el mismo. La Figura [1.1]. muestra lo descrito.



**Figura. [1.1].** Planteo geométrico del problema de los senderos y ubicación del sistema de referencia utilizado.

**1.b.** Se requiere el diseño de curvas que constituirán las transiciones entre las cuatro rectas que definen los límites de los senderos y la circunferencia exterior que rodea el monumento.

**Enfoque I:** Se adopta que las transiciones descritas sean arcos de parábolas tangentes a la circunferencia y a las rectas simultáneamente, y sus ejes focales sean paralelos a los ejes de los senderos existentes. Represente gráficamente.

El radio de la circunferencia interior es de 6m, y el de la circunferencia exterior es

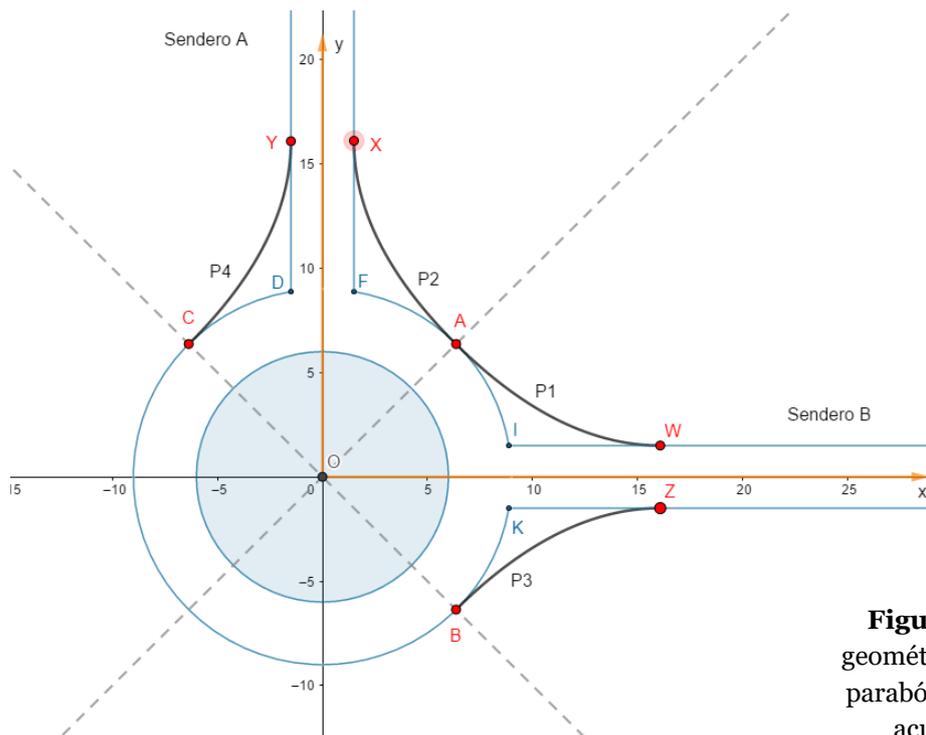
de 9m. En base al sistema de referencia adoptado, la ecuación cartesiana de la circunferencia exterior es:

$$x^2 + y^2 = 81 \tag{1.1.}$$

De acuerdo a las condiciones definidas en el enunciado, el enlace definido entre los puntos X y W, será descrito por dos arcos de parábolas. Establecemos los puntos a partir de los cuales se trazarán las parábolas de enlace en las condiciones mencionadas, como los puntos de intersección entre la circunferencia y las rectas  $y=x$  e  $y=-x$ . De esta manera se obtendrá simetría de los enlaces para cada sendero, como puede observarse en la Figura [1.2].

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 81 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow A(6.36, 6.36)\text{m} \tag{1.2.}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 81 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B(6.36, -6.36)\text{m} \\ C(-6.36, 6.36)\text{m} \end{matrix} \tag{1.3.}$$



**Figura. [1.2].** Planteo geométrico de los enlaces parabólicos diseñados de acuerdo al enfoque I.

En los puntos A, B y C, las parábolas y la circunferencia exterior tendrán rectas tangentes en común.

A continuación, obtendremos las ecuaciones cartesianas de las dos parábolas que pasan por el punto A, luego deduciremos las restantes por simetría. La recta

tangente a la circunferencia en el punto A tiene pendiente  $m=-1$ , ya que resulta ortogonal a la recta  $y=x$ , recta que pasa por el centro de la circunferencia  $(0,0)$  y el punto A de tangencia.

La transición entre la circunferencia y el borde superior del sendero horizontal, es decir la recta  $y=1.5$ , se describe mediante una porción de parábola con eje focal paralelo al eje  $y$ .

Esta parábola (P1), deberá ser tangente a la recta  $y=1.5$ , por lo tanto su vértice W debe estar ubicado sobre la misma, es decir  $W(h, 1.5)$ . También debe ser tangente a la circunferencia en el punto A. Entonces, el punto A pertenece a la parábola y la pendiente de la recta tangente a la misma en dicho punto es  $m=-1$ . Luego:

$$(x - h)^2 = 2p(y - 1.5) \quad [1.4.]$$

Derivando implícitamente la ecuación obtenemos  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-h}{p}$ , expresión que indica la pendiente de la recta tangente en función de las coordenadas del punto de tangencia. Para el punto A  $(6.36, 6.36)$ , tenemos:

$$\frac{6.36 - h}{p} = -1 \Rightarrow p = h - 6.36 \quad [1.5.]$$

Además, las coordenadas del punto A  $(6.36, 6.36)$  satisfacen la ecuación de la parábola, entonces:

$$\begin{cases} p = h - 6.36 \\ ((6.36 - h)^2 = 2p(6.36 - 1.5)) \end{cases} \quad [1.6.]$$

$$p^2 = 9.72p \Rightarrow p \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 9.72 \\ h = 16.08 \end{cases} \quad [1.7.]$$

La ecuación que describe este tramo, entre los puntos W y A, es entonces:

$$P_1: (x - 16.08)^2 = 19.44(y - 1.5) \quad 6.36m \leq x \leq 16.08m \quad [1.8.]$$

Para el tramo entre el punto A y el borde lateral derecho del sendero vertical, es decir la recta  $x=1.5$ , utilizamos una parábola con eje focal paralelo al eje  $x$ . Por un procedimiento similar al descripto, obtenemos:

$$P_2: (y - 16.08)^2 = 19.44(x - 1.5) \quad 6.36m \leq y \leq 16.08m \quad [1.9.]$$

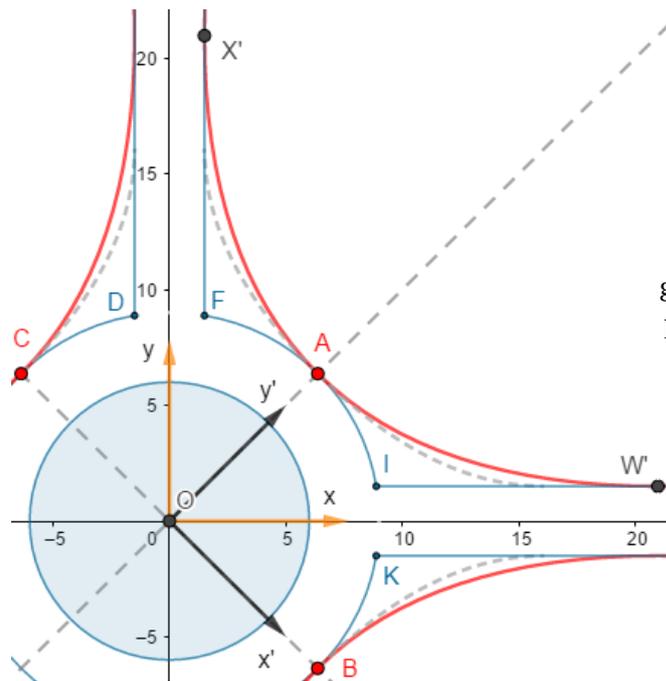
Por simetría, podemos obtener las expresiones para los restantes tramos:

$$P_3: (x - 16.08)^2 = -19.44(y + 1.5) \quad 6.36m \leq x \leq 16.08m \quad [1.10.]$$

$$P_4: (y - 16.08)^2 = -19.44(x + 1.5) \quad 6.36\text{m} \leq y \leq 16.08\text{m} \quad [1.11.]$$

**1.c. Enfoque II:** En el presente caso, se requiere que las curvas que constituyen las transiciones sean descritas por arcos de parábolas cuyos ejes focales no resulten paralelos a los ejes de los senderos. Represente gráficamente.

A partir del presente enfoque, se busca que la transición materializada en el enfoque anterior por las parábolas P1 y P2, se describa a partir de una única parábola rotada de manera que su eje focal no resulte paralelo al eje de los senderos. Esto implica colocar el vértice de dicha parábola en el punto A y redefinir los puntos W y X de manera que la parábola resulte tangente a los senderos en los nuevos puntos W' y X'. Para ello, se define un nuevo sistema de referencia x'y' rotado respecto al sistema de referencia original, tal como puede observarse en la Figura [1.3].



**Figura. [1.3].** Planteo geométrico de los enlaces parabólicos diseñados de acuerdo al enfoque B.

Teniendo en cuenta los diámetros de las circunferencias, las coordenadas del punto A en el sistema de referencia x'y' son:  $A_{x'y'}(0, 9)$ . De esta manera la ecuación de la parábola buscada resulta:

$$P_5: x'^2 = 2p(y' - 9) \quad [1.12.]$$

Dicha parábola debe ser tangente a las rectas que definen los bordes laterales de

los senderos y que contienen a los puntos  $W'$  y  $X'$ . Los versores directores de los nuevos ejes  $x'$  e  $y'$  están dados por  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  y  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , respectivamente. Por lo tanto, consideramos la siguiente transformación ortogonal de coordenadas:

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}' \quad [1.13.]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad [1.14.]$$

La matriz  $\mathbf{P}$  tiene por columnas a los versores directores de los nuevos ejes coordenados  $x'$  e  $y'$ . Operando con la expresión [1.14.] aplicada a las rectas  $y=1.5$  y  $x=1.5$ , obtenemos sus ecuaciones en el nuevo sistema:

$$y' = x' + 1.5\sqrt{2} ; y' = -x' + 1.5\sqrt{2} \quad [1.15.]$$

De esta manera, el problema se reduce a hallar el parámetro  $p$  de la parábola que es tangente a las rectas dadas por las expresiones [1.15.], de pendientes  $+1$  y  $-1$  y cuyo vértice es el punto A. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación de la parábola [1.12] y reemplazamos la pendiente de la recta  $(\frac{dy'}{dx'} = m)$  por  $m=1$  y por  $m=-1$ , en los puntos  $W'$  y  $X'$  respectivamente:

$$2x'|_{W'} = 2p \frac{dy'}{dx'} \Big|_{W'} = 2p \quad [1.16.]$$

$$x'|_{W'} = p ; x'|_{X'} = -p \quad [1.17.]$$

Los puntos  $W'$  y  $X'$  pertenecen tanto a las rectas dadas por las ecuaciones [1.15.], como a la parábola dada por la ecuación [1.12.]. Por lo tanto, al plantear el sistema dado por las ecuaciones [1.12.], [1.15.] y [1.17.], podemos hallar la siguiente ecuación de segundo grado en la incógnita  $p$ , dada por el parámetro de la parábola:

$$-p^2 + 13.7574p = 0 \quad [1.18.]$$

En virtud que la solución  $p = 0$  carece de sentido geométrico, el parámetro de la parábola buscada es:  $p = 13.7574$ .

De esta manera, la parábola con vértice en el punto A tangente a las rectas que definen los senderos en el sistema de referencia  $x'y'$  (P5), es:

$$P_5: x'^2 = 27.5148(y' - 9) \quad [1.19.]$$

De manera adicional, es posible establecer una rotación de la parábola hallada y encontrar la ecuación de la misma en el sistema de referencia  $xy$  original:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{P}^T \mathbf{X} \quad [1.20.]$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad [1.21.]$$

Con lo que se obtiene:

$$P_5: x^2 - 2xy + y^2 - 38.91x - 38.91y + 495.27 = 0 \quad [1.22.]$$

En el caso de las parábolas con vértice en los puntos B y C (P6 y P7 respectivamente), desarrollando un análisis análogo al anterior nos permite hallar las siguientes ecuaciones:

$$P_6: x^2 + 2xy + y^2 - 38.91x + 38.92y + 495.27 = 0 \quad [1.23.]$$

$$P_7: x^2 + 2xy + y^2 + 38.91x - 38.92y + 495.27 = 0 \quad [1.24.]$$

## 2.2.

### Problema 2. Diseño de una zona de recreación.

En la etapa de anteproyecto de un barrio residencial es necesario diseñar áreas peatonales alrededor de una laguna artificial existente, con fines recreativos. La laguna tiene forma elíptica, y las áreas peatonales también serán elipses, con centro y excentricidades coincidentes con la laguna.

**Área Temática:** Ingeniería. Arquitectura. Diseño.

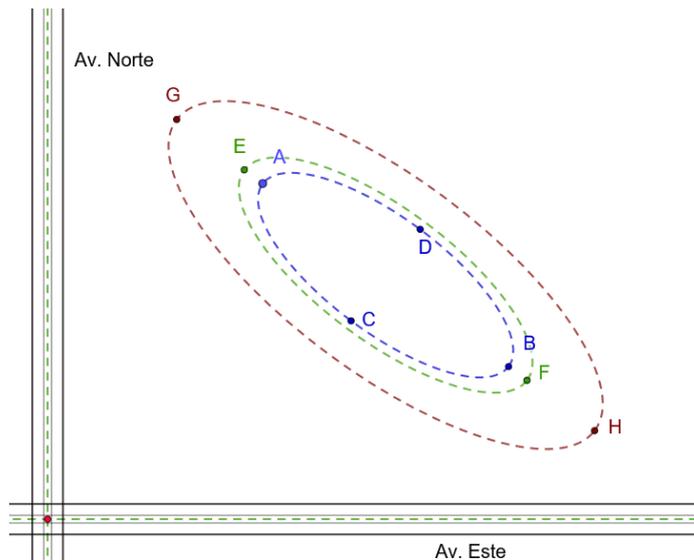
**Nivel:** INTERMEDIO 

#### Descripción del problema.

Se dispone de un amplio terreno ubicado en el Gran Mendoza, el cual será destinado a la urbanización de un barrio residencial. El terreno reservado se encuentra delimitado por dos avenidas existentes perpendiculares entre sí, denominadas *Av. Norte* y *Av. Este* respectivamente. Las mismas serán consideradas ejes de referencia del problema a resolver.

El barrio incluye un amplio sector de esparcimiento que cuenta con una laguna central artificial existente de forma elíptica. A partir del contorno de dicha laguna, los arquitectos diseñadores desean construir una pista de circulación peatonal y un área de entretenimiento y descanso. Éstas deben ser de forma elíptica y a su vez poseer igual centro y excentricidad que la elipse que configura el borde de la laguna artificial existente en la zona. En forma adicional, dichas elipses deben poseer un eje mayor de 230m y 340m, respectivamente. La Figura [2.1]. muestra la ubicación de las avenidas y las áreas elípticas descriptas.

**2.a.** Determine la ecuación de la elipse que delimita el borde de la laguna. Represente y verifique gráficamente las soluciones obtenidas.



**Figura. [2.1].** Croquis general de ubicación en planta de los elementos constituyentes del problema.

### Desarrollo de la solución.

A los efectos de cumplir con los objetivos planteados, es necesario en primer lugar identificar adecuadamente la elipse que configura la laguna elíptica existente. Para ello, se relevaron las coordenadas de los puntos A, B, C y D, que constituyen los extremos de los semiejes mayor y menor de la laguna. La Tabla [2.1] muestra las coordenadas de los puntos relevados, medidas con relación a las avenidas Este y Norte, adoptadas como ejes  $x$  e  $y$  respectivamente.

Punto	Coordenada $x$ [m]	Coordenada $y$ [m]
A	140.00	220.00
B	300.00	100.00
C	197.50	130.00
D	242.50	190.00

**Tabla. [2.1].** Coordenadas de los vértices de la elipse que configura la laguna existente.

A partir de dichos puntos, es posible determinar las longitudes de los ejes mayor y menor, es decir,  $\|AB\|$  y  $\|CD\|$  (ver Figura [2.1].):

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (300.00 - 140.00, 100.00 - 220.00) \\ &= (160.00, -120.00) \end{aligned} \quad [2.1.]$$

$$\|AB\| = \sqrt{(160.00)^2 + (-120.00)^2} = 200.00m \quad [2.2.]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{CD} &= \mathbf{OD} - \mathbf{OC} = (242.50 - 197.50, 190.00 - 130.00) \\ &= (45.00, 60.00) \end{aligned} \quad [2.3.]$$

$$\|CD\| = \sqrt{(45.00)^2 + (60.00)^2} = 75.00m \quad [2.4.]$$

Se plantea un sistema de referencia  $x''y''$  respecto del cual la elipse se encuentra en su posición estándar. Las direcciones de los ejes de dicho sistema coinciden con las correspondientes a los vectores  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{CD}$ . De esta manera, determinando los versores  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  de dichas direcciones, obtenemos las columnas de la matriz de transformación de coordenadas,  $\mathbf{P}$ .

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|} = \frac{(160.00, -120.00)}{200.00} \quad [2.5.]$$

$$\mathbf{u}_1 = \left( \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right) \quad [2.6.]$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{CD}}{\|\mathbf{CD}\|} = \frac{(45.00, 60.00)}{75.00} \quad [2.7.]$$

$$\mathbf{u}_2 = \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \quad [2.8.]$$

Con la información obtenida, la matriz  $\mathbf{P}$  queda definida por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad [2.9.]$$

En la misma, es necesario verificar:

$$|\mathbf{P}| = 1 \quad [2.10.]$$

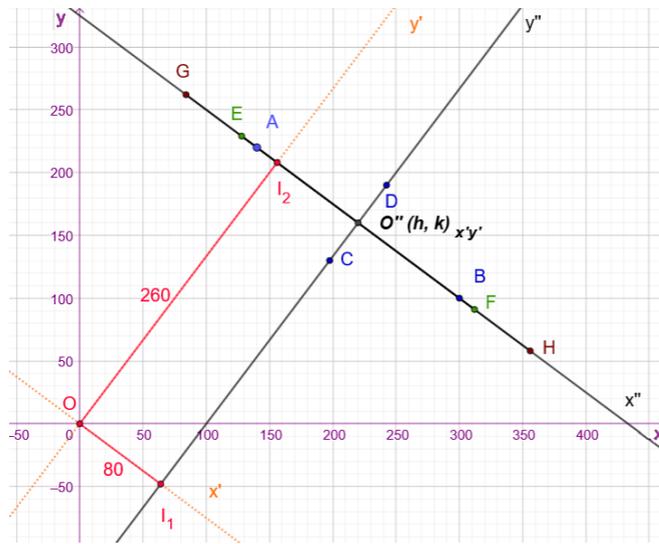
De acuerdo al orden de las columnas de la matriz  $\mathbf{P}$ , se determina que el eje  $x''$ , posee la misma dirección que  $\mathbf{u}_1$ , o lo que es equivalente al vector  $\mathbf{AB}$ . En tanto que el eje  $y''$  tiene la misma dirección que  $\mathbf{u}_2$ , o lo que es equivalente al vector  $\mathbf{CD}$ . Se considera como origen del sistema de referencia  $x''y''$  al centro de la elipse, tal como se puede visualizar en la Figura [2.2]. Es decir, el origen del sistema de referencia  $x''y''$  es el punto medio del segmento AB cuyas coordenadas son  $O''(220.00, 160.00)_{xy} m$ .

Con estos datos, la ecuación de la elipse que modela la laguna respecto del sistema de referencia  $x''y''$  está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{x''^2}{(100.00)^2} + \frac{y''^2}{(37.50)^2} = 1 \quad [2.11.]$$

El origen del sistema  $x''y''$  respecto a un nuevo sistema de ejes coordenados

$x'y'$  paralelos a los anteriores y con origen en la intersección de las dos avenidas (ver Figura [2.2]), está dado por sus coordenadas  $O''(h, k)_{x'y'}$ .



**Figura. [2.2].** Análisis de los datos en los diferentes sistemas de referencias para el problema.

Para determinar las coordenadas del centro  $O''$  en el sistema de referencia  $x'y'$  utilizamos la ecuación de transformación de coordenadas ( $P^T X = X'$ ) que permite obtener las coordenadas del punto  $O''$  en el sistema  $x'y'$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220.00 \\ 160.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.00 \\ 260.00 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,  $O''(80.00, 260.00)_{x'y'}$ . A partir de las coordenadas del centro es posible establecer las correspondientes ecuaciones de traslación:

$$\begin{cases} x'' = x' - 80.00 \\ y'' = y' - 260.00 \end{cases} \quad [2.12.]$$

Sustituyendo [2.12.] en [2.11.] y trabajando algebraicamente obtenemos la ecuación de la elipse que delimita la laguna en el sistema de referencia  $x'y'$ :

$$\frac{(x' - 80.00)^2}{100.00^2} + \frac{(y' - 260.00)^2}{37.50^2} = 1 \quad [2.13.]$$

$$\frac{x'^2}{100.00^2} - \frac{160.00x'}{100.00^2} + \frac{80.00^2}{100.00^2} + \frac{y'^2}{37.50^2} - \frac{520.00y'}{37.50^2} + \frac{260.00^2}{37.50^2} = 1 \quad [2.14.]$$

$$\frac{x'^2}{100.00^2} + \frac{y'^2}{37.50^2} - \frac{160.00x'}{100.00^2} - \frac{520.00y'}{37.50^2} + \frac{80.00^2}{100.00^2} + \frac{260.00^2}{37.50^2} - 1.00 = 0 \quad [2.15.]$$

$$1406.25x'^2 - 225000.00x' + 10000.00y'^2 - 5200000.00y' + 670937500.00 = 0 \quad [2.16.]$$

Expresando la ecuación [2.16] en forma matricial y aplicando el teorema fundamental de los ejes principales en  $R^2$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} [x' \ y'] \begin{bmatrix} 1406.25 & 0 \\ 0 & 10000.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ + [-225\ 000.00 \ -5\ 200\ 000.00] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ + 670937500.00 = 0 \end{aligned} \quad [2.17.]$$

Denominando:

$$\mathbf{X}'_1 = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1406.25 & 0 \\ 0 & 10000.00 \end{bmatrix} \quad [2.18.]$$

$$\mathbf{K}'_1 = [-225000.00 \ -5200000.00]; \quad f_1 = 670937500.00$$

Siendo la matriz  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{P}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1$  es posible obtener la matriz  $\mathbf{A}_1$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{P}_1^T \quad [2.19.]$$

$$\mathbf{A}_1 = \left( \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1406.25 & 0 \\ 0 & 10000.00 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad [2.20.]$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1125.00 & 6000.00 \\ -843.75 & 8000.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad [2.21.]$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4500.00 & 4125.00 \\ 4125.00 & 6906.25 \end{bmatrix} \quad [2.22.]$$

A partir de la ecuación  $\mathbf{K}'_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{P}_1$ , obtenemos la matriz  $\mathbf{K}_1$ :

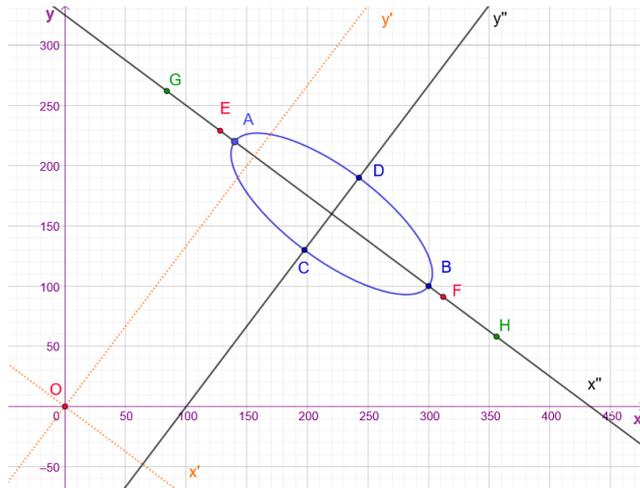
$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}'_1 \mathbf{P}_1^T \quad [2.23.]$$

$$\mathbf{K}_1 = [-225000.00 \ -5200000.00] \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad [2.24.]$$

$$K_1 = [-3300000.00 \quad -4025000.00] \quad [2.25.]$$

Conociendo las matrices  $A_1$  y  $K_1$ , podemos determinar la ecuación de la elipse que modela la laguna, cuya representación se visualiza en la Figura [2.3]:

$$4500.00x^2 + 8250.00xy + 6906.25y^2 - 3300000.00x - 4025000.00y + 670937500.00 = 0 \quad [2.26.]$$



**Figura. [2.3].** Representación gráfica de la elipse que constituye la laguna en estudio y los sistemas de referencia utilizados.

**2.b.** Obtenga una expresión para describir las elipses que tienen igual centro y excentricidad que la elipse que delimita la laguna.

Analizando la información que nos brinda el problema acerca de la pista de caminata y de la zona de juegos, disponemos como datos las longitudes de los ejes mayores de las elipses que describen dichos sectores, junto con el requerimiento que las excentricidades coincidan con la correspondiente a la elipse que describe el borde de la laguna. Por lo tanto, utilizando el concepto de familia de elipses, obtendremos una expresión para describir elipses que tienen igual centro y excentricidad que la elipse que delimita la laguna. La excentricidad se define como:

$$e = \frac{c}{a} \quad [2.27.]$$

donde  $c$  es la semidistancia focal de la elipse y  $a$  es la longitud del semieje mayor de la misma. A partir de los datos del problema, analizaremos la excentricidad  $e$  con los datos de la elipse que modela la laguna.

Conociendo la longitud del semieje mayor  $a = \frac{1}{2}\|\mathbf{AB}\| = 100m$  y la longitud del semieje menor  $b = \frac{1}{2}\|\mathbf{CD}\| = 37.5m$  calculamos la semidistancia focal a partir de la siguiente expresión:

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad [2.28.]$$

$$(100.00m)^2 - (37.50m)^2 = c^2 \quad [2.29.]$$

$$c = 92.7025m \quad [2.30.]$$

Por lo tanto, la excentricidad de las elipses buscadas es:  $e = \frac{92.7025m}{100m} = 0.927$

Considerando el sistema de coordenadas  $x''y''$ , la familia de elipses con igual excentricidad está determinada por:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad [2.31.]$$

Como  $c = e \cdot a$ , es posible sustituir en la expresión anterior y obtenemos:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{a^2 - (e \cdot a)^2} = 1 \quad [2.32.]$$

Operando algebraicamente y conociendo el valor de  $e$ , tenemos que:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad [2.33.]$$

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{a^2(1 - 0.927^2)} = 1 \quad [2.34.]$$

Es decir, podemos definir a la familia de elipses con  $e = 0.927$ , como:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{0.1407 a^2} = 1, \quad a > 100 \quad [2.35.]$$

**2.c.** Determine las ecuaciones de las elipses que delimitan la zona de caminata alrededor de la laguna y el borde externo de la zona de juegos.

Para determinar la ecuación de la elipse que modela la pista de caminata, se dispone del dato de 230.00m correspondiente a la longitud del eje mayor de la misma. De esta manera, si denominamos  $E$  y  $F$  a los puntos extremos del mismo,

podemos escribir las siguientes expresiones:

$$a = \frac{1}{2} \|\mathbf{EF}\| = \frac{230.00m}{2} = 115.00m \quad [2.36.]$$

Sustituimos el valor hallado en ecuación [2.35], para obtener la ecuación de la elipse en el sistema de coordenadas  $x''y''$ :

$$\frac{x''^2}{115.00^2} + \frac{y''^2}{0.1407(115.00)^2} = 1 \quad [2.37.]$$

$$\frac{x''^2}{115.00^2} + \frac{y''^2}{43.136^2} = 1 \quad [2.38.]$$

Para expresar la ecuación de esta elipse en el sistema de referencia inicial establecido para la descripción del barrio, es decir el sistema  $xy$ , sustituimos las ecuaciones de traslación [2.12] en [2.38]:

$$\frac{(x' - 80.00)^2}{115.00^2} + \frac{(y' - 260.00)^2}{43.136^2} = 1 \quad [2.39.]$$

Desarrollando algebraicamente esta última expresión, obtenemos:

$$1860.7145x'^2 - 297714.32x' + 13225.00y'^2 - 6877000.00y' + 881310623.60 = 0 \quad [2.40.]$$

Al expresar la ecuación en forma matricial y aplicar el teorema de los ejes principales en  $R^2$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} [x' \quad y'] \begin{bmatrix} 1860.7145 & 0 \\ 0 & 13225.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ + [-297714.32 \quad -6877000.00] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 881310623.60 \\ = 0 \end{aligned} \quad [2.41.]$$

Designamos:

$$\mathbf{X}'_2 = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1860.7145 & 0 \\ 0 & 13225.00 \end{bmatrix}; \quad [2.42.]$$

$$\mathbf{K}'_2 = [-297 \ 714.32 \quad -6877000.00]; \quad f_2 = 881310623.60$$

Para expresar la ecuación del borde externo de la pista de caminata en el sistema  $xy$ , obtenemos la matriz  $\mathbf{A}_2$ , a partir de:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{P}_1^T \quad [2.43.]$$

$$A_2 = \left( \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1860.7145 & 0 \\ 0 & 13225.00 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad [2.44.]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5951.86 & 5454.86 \\ 5454.86 & 9133.86 \end{bmatrix} \quad [2.45.]$$

Calculamos la matriz  $K_2$ :

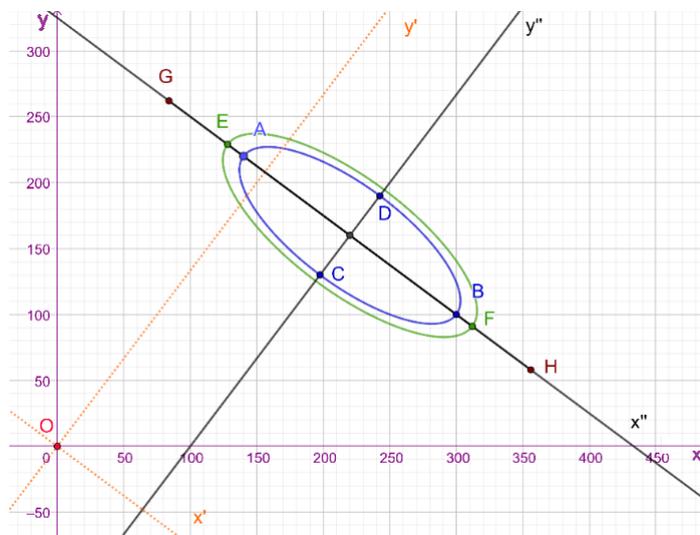
$$K_2 = K_2' P_1^T \quad [2.46.]$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -297714.32 & -6877000.00 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad [2.47.]$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -4364371.46 & -5322971.41 \end{bmatrix} \quad [2.48.]$$

Conociendo las matrices  $A_2$  y  $K_2$ , podemos determinar la ecuación de la elipse que modela el borde exterior de la pista de caminata en el sistema  $xy$ , cuya representación gráfica es posible visualizar en la Figura [2.4]:

$$5951.86x^2 + 10\,909.72xy + 9133.86y^2 - 4364371.46x - 5322971.41y + 881310623.60 = 0 \quad [2.49.]$$



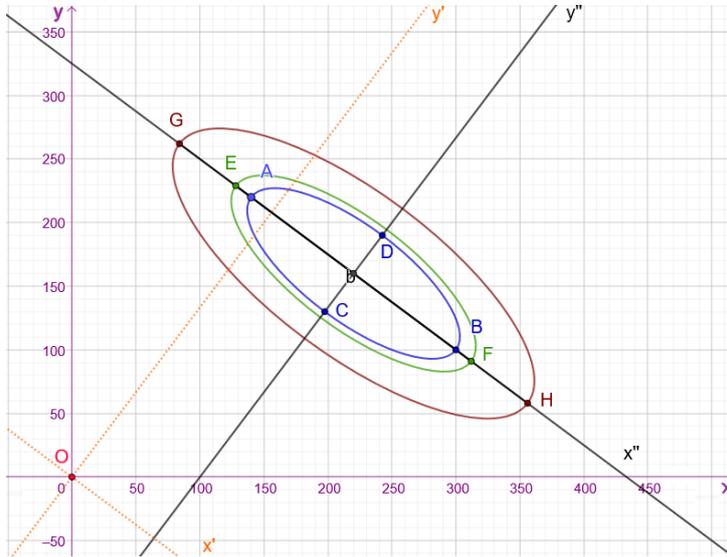
**Figura. [2.4].**  
Representación gráfica de la elipse que define la pista de caminatas.

Procediendo de igual modo, se deja al lector la tarea de verificar que la ecuación de la elipse que modela el borde externo de la zona de juegos, respecto del sistema  $xy$  está dada por:

$$13006.64x^2 + 23840.04xy + 19960.00y^2 - 9537326.46x - 11632005.14y + 1865508634.00 = 0 \quad [2.50.]$$

Cabe observar que dicha ecuación se obtuvo realizando una aproximación en el valor del semieje menor, de 63.77m.

La Figura [2.5] permite observar las tres elipses analizadas en el problema:

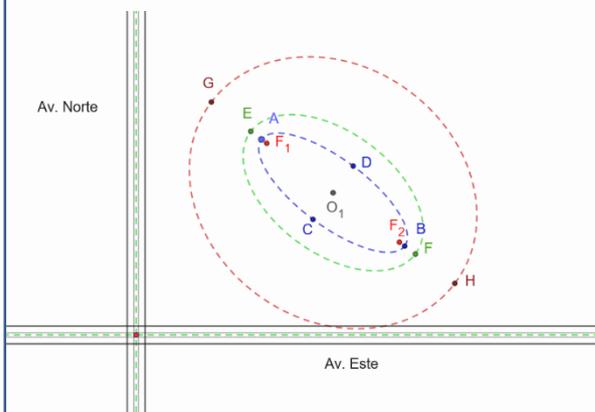


**Figura. [2.5].** Representación gráfica de las elipses analizadas y los diferentes sistemas de referencia utilizados para la resolución del problema.

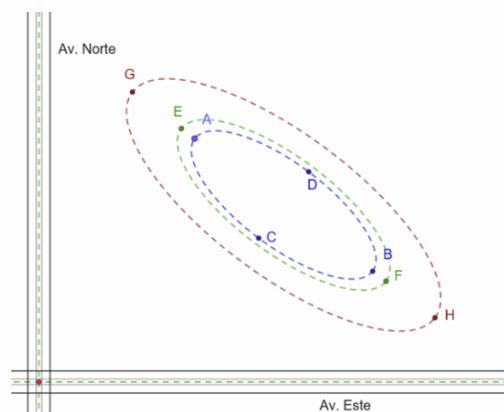
**¿Qué ocurre con la distancia focal de las elipses cuando la excentricidad es constante?**

En el problema anterior, tenemos que los valores de los semiejes de las tres elipses son diferentes y que la excentricidad es constante. Siendo  $e = \frac{c}{a}$ , necesariamente la distancia focal se modifica.

Si cambiamos esta restricción a que la distancia focal sea constante, lo que se modificará será la excentricidad. Las Figuras [2.6]. y [2.7] ilustran las dos situaciones descritas.



**Figura. [2.6].** Representación una familia de elipses con *distancia focal* constante.



**Figura. [2.7].** Representación una familia de elipses con *excentricidad* constante.

## 2.3.

### Problema 3. Diseño de la portada de un libro de ciencias.

El Departamento de Diseño Gráfico de una empresa editorial se encuentra abocado al bosquejo de la portada de un libro de ciencias próximo a publicarse. La idea gráfica principal implica la representación de una *Espiral de Arquímedes* cuyo origen se encuentre ubicado en el punto central de un espacio delimitado por las dimensiones de una hoja tamaño A5 según Normas IRAM.

**Área Temática:** Ingeniería. Arquitectura. Diseño.

**Nivel:** BÁSICO 

#### Descripción del problema.

La denominada espiral de *Arquímedes* es una curva plana que puede definirse como el lugar geométrico generado por la trayectoria que describe una partícula que se desplaza a velocidad constante sobre una recta que gira respecto a un punto con velocidad angular también constante.

**3.a.** A partir del centro de la portada del libro, se busca que el desarrollo de la espiral ocupe el mayor espacio posible para un número entero de ciclos. Bajo este criterio se solicita la presentación de tres propuestas para su análisis, junto con la ecuación de los lugares geométricos asociados y la determinación de puntos característicos de los mismos.

#### Desarrollo de la solución.

La ecuación en coordenadas polares de una espiral de *Arquímedes* está dada a partir de la siguiente expresión:

$$\rho(\theta) = a\theta \quad [3.1.]$$

En la misma,  $a$  es una constante asociada a la distancia que existe entre dos espiras consecutivas de la espiral.

Llamamos  $s$  a la distancia entre dichas espiras medida sobre el eje polar. Para el caso de una espira genérica  $i$  y la consecutiva  $i+1$ , considerando el ángulo  $\theta$  en radianes tendremos:

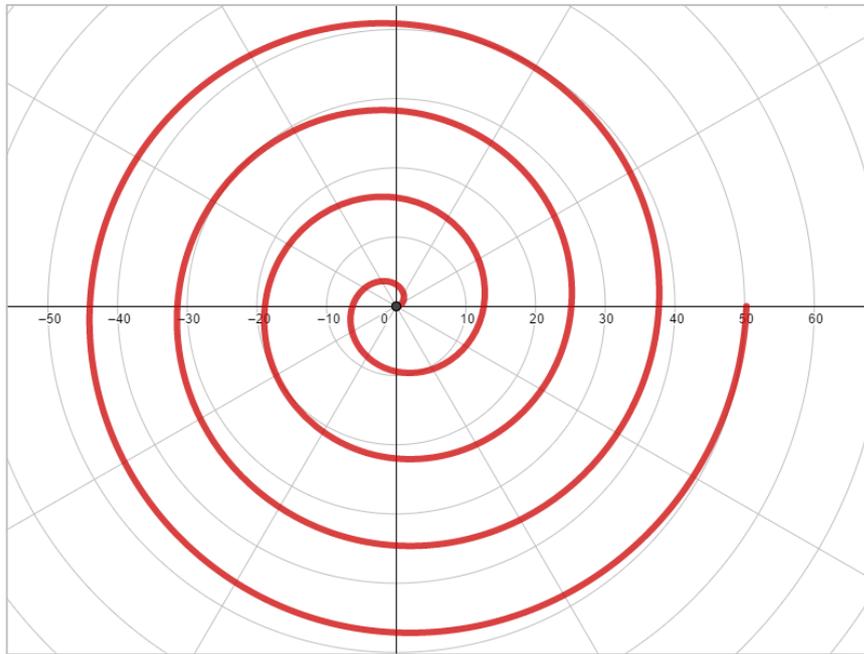
$$\rho(\theta)|_i = ai2\pi \quad [3.2.]$$

$$\rho(\theta)|_{i+1} = a(i+1)2\pi \quad [3.3.]$$

Con lo cual la distancia entre ambas espiras resulta:

$$s = a(i+1)2\pi - ai2\pi = a2\pi \quad [3.4.]$$

La Figura [3.1] muestra un ejemplo de espiral de Arquímedes, en la cual se han representado 4 espiras completas para un valor de  $a=2$ .



**Figura. [3.1].**  
Espiral de Arquímedes representada con 4 espiras y un valor de  $a=2$ .

### **Determinación de las espirales adecuadas al diseño solicitado.**

Las espirales a determinar deben ser inscriptas en un espacio definido por una hoja de papel tamaño normalizado A5 de acuerdo a normas IRAM (*Instituto de Racionalización Argentino de Materiales*). La consulta de dicha norma indica que las dimensiones de trabajo serán: ancho  $b=148\text{mm}$  y altura  $h=210\text{mm}$ .

Del análisis de dichas dimensiones y teniendo presente que es necesario que la espiral ocupe el mayor espacio posible para un número entero de ciclos, se desprende que, para la ubicación del origen de coordenadas en el centro de la hoja, la dimensión que determina el límite dado es  $b/2=74\text{mm}$ . A los efectos de desarrollar en dicha dimensión un número entero de espiras ( $n$ ), se debe cumplir que:

$$na2\pi = 74mm \quad [3.5.]$$

De esta manera a partir de la expresión [3.5], conociendo la cantidad de espiras que se busca representar se obtienen los respectivos valores del parámetro  $a$ .

En la Tabla [3.1] se expresa el valor de  $a$  correspondiente a tres números diferentes de espiras completas.

Espiras	$a$ [mm]
2	5.888733
5	2.355493
8	1.472183

**Tabla. [3.1].** Valores de la constante  $a$  correspondientes a diversos valores de  $n$ .

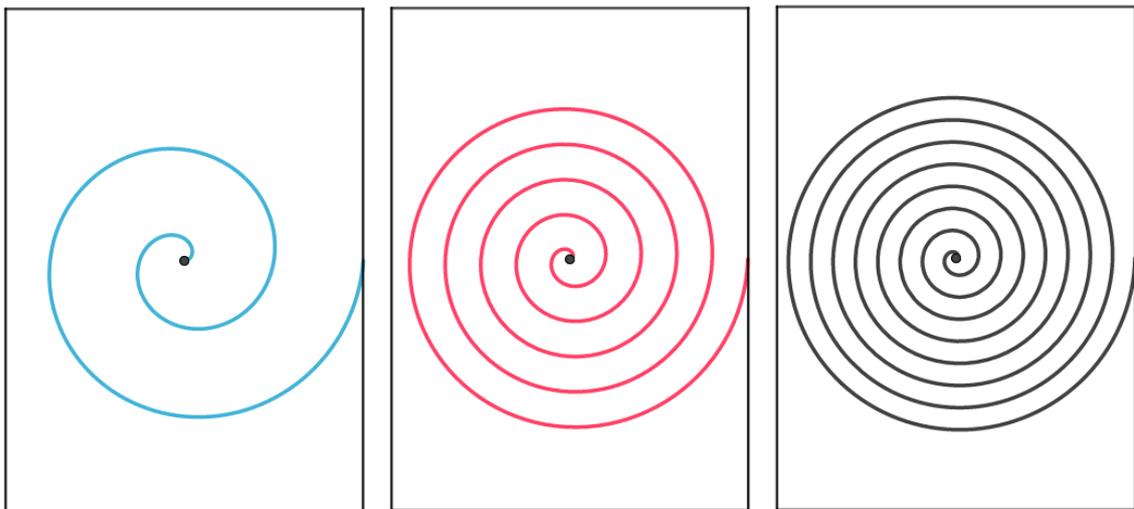
Teniendo en cuenta dichos valores, las correspondientes ecuaciones polares de las curvas analizadas estarán dadas por:

$$\rho(\theta)|_{n=2} = 5.89 \theta \quad [3.6.]$$

$$\rho(\theta)|_{n=5} = 2.36 \theta \quad [3.7.]$$

$$\rho(\theta)|_{n=8} = 1.47 \theta \quad [3.8.]$$

La Figura [3.2] muestra la representación gráfica de las 3 espirales desarrolladas a partir de las ecuaciones anteriores, inscriptas en la hoja de formato solicitado.



**Figura. [3.2].** Representación gráfica de la solución al problema planteado a partir de 3 espirales de Arquímedes con 2, 5 y 8 espiras enteras.

Por otra parte, la Tabla [3.2] permite observar el cálculo de puntos característicos, en este caso los puntos de intersección de las tres espirales diseñadas con el eje polar.

$\theta$ [rad]	Espiral 1 a=5.88873 [mm]	Espiral 2 a=2.35549 [mm]	Espiral 3 a=1.47218 [mm]
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.1416	18.5000	7.4000	4.6250
6.2832	37.0000	14.8000	9.2500
9.4248	55.5000	22.2000	13.8750
12.5664	74.0000	29.6000	18.5000
15.7080		37.0000	23.1250
18.8496		44.4000	27.7500
21.9911		51.8000	32.3750
25.1327		59.2000	37.0000
28.2743		66.6000	41.6250
31.4159		74.0000	46.2500
34.5575			50.8750
37.6991			55.5000
40.8407			60.1250
43.9823			64.7500
47.1239			69.3750
50.2655			74.0000

**Tabla. [3.2].** Puntos de intersección con el eje polar.

### Referencia Histórica

La espiral de *Arquímedes* también conocida como espiral aritmética o espiral uniforme fue cuidadosamente estudiada por el físico, astrónomo y matemático griego *Arquímedes de Siracusa*, (288 a.C., 212 a.C.). En su libro “*De Las Espirales*”, (*On Spirals*), analizó en detalle importantes aspectos asociados a esta curva tales como la distancia entre espiras, las características de desarrollo de la espiral y ciertas propiedades de las áreas contenidas entre espiras, entre otros. Algunos resultados notables dados por sus estudios consisten en la obtención de los procedimientos a partir de los cuales la utilización de la espiral se aplica al cálculo de longitudes de arcos de circunferencia, a la resolución del tradicional problema de la cuadratura del círculo y a la trisección de un ángulo.

Es importante notar que la representación de la espiral de *Arquímedes* no puede ser resuelta con la utilización exclusiva de regla y compás tal como requería en su momento el clasicismo geométrico griego.

## 2.4.

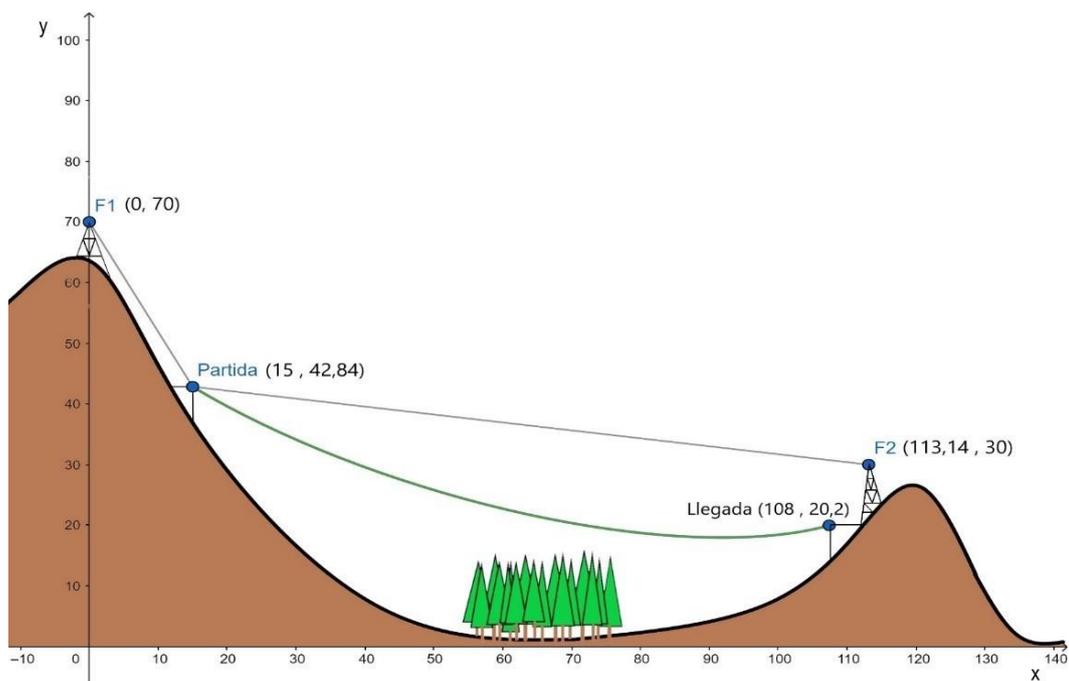
### Problema 4. Geometría de una tirolesa.

Una tirolesa está formada por un cable de 130 m de largo fijado a 2 puntos que se ubican según se muestra en la Figura [4.1], con una diferencia de altura de 40 metros y una distancia entre las bases de las torres de fijación de 113,14 metros ( $80\sqrt{2}$  m). Hay un bosque situado entre los 55 y los 75 metros, medidos horizontalmente desde la base, con picos que alcanzan los 18 metros de altura.

**Área Temática:** Ingeniería.

**Nivel:** AVANZADO

#### Descripción del problema.



**Figura. [4.1].** Geometría de la tirolesa.

La tirolesa es un sistema mecánico que utiliza un cable fijo entre dos puntos e históricamente ha sido muy usada en la construcción. Hoy en día su utilización más común es en entretenimiento. El sistema consiste en fijar un cable a dos puntos y colocar un carro que desliza sobre el mismo.

**4.a.** Se requiere la determinación de la ecuación del lugar geométrico que definen los puntos de la trayectoria seguida, tomando como referencia la base de la torre de salida y el nivel de terreno.

### Desarrollo de la solución.

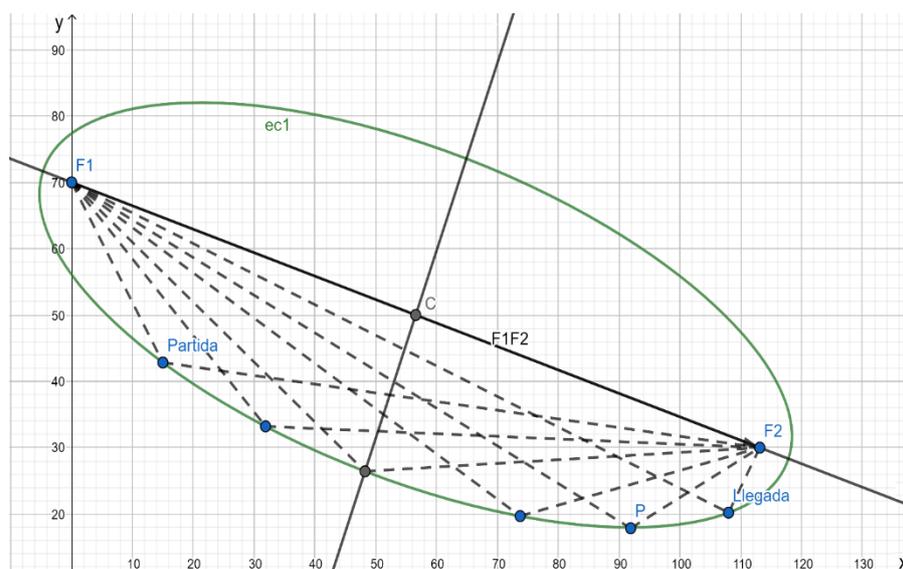
Dado que la distancia a los puntos de fijación ( $F_1$  y  $F_2$ ) es igual a la longitud del cable que se mantiene constante, podemos modelar la trayectoria como el lugar geométrico de los puntos de un arco de elipse que tiene como focos a los puntos de fijación.

Tomaremos como sistema de referencia un par de ejes cartesianos horizontal y vertical que tienen como origen la base de la torre de salida (ver Figura [4.1.]). Las coordenadas de los puntos  $F_1$  y  $F_2$  respecto a este sistema son:

$$F_1(0, 70) \quad [4.1.]$$

$$F_2(80\sqrt{2}, 30) \quad [4.2.]$$

Plantaremos una base  $B$  respecto de la cual la ecuación de la elipse no tenga términos asociados a rotación ni traslación. Para ello, debemos situarnos en el punto medio entre los dos focos (centro de la elipse) y tomar como alguno de los ejes coordenados a la recta que contiene a los focos, denominada eje focal (ver Figura [4.2.]).



**Figura. [4.2].** Evolución de la posición del carro describiendo un arco elíptico desde la partida hasta la llegada.

A continuación, buscamos vectores  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_2$  que conformen una base ortonormal para definir un sistema de referencia respecto del cual la elipse esté en su posición normal. El primer vector de la base tiene la dirección del vector que une ambos focos, es decir:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2}{\|\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2\|} = \frac{(80\sqrt{2}, -40)}{\sqrt{(80\sqrt{2})^2 + 40^2}} = \frac{(80\sqrt{2}, -40)}{120} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right) \quad [4.3.]$$

El segundo vector de la base es paralelo al semieje menor de la elipse, de manera tal que junto con el vector  $\mathbf{b}_1$  determinen una base ortonormal. Por lo tanto,  $\mathbf{b}_2$  es un vector unitario perpendicular a  $\mathbf{b}_1$  y resulta:

$$\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \quad [4.4.]$$

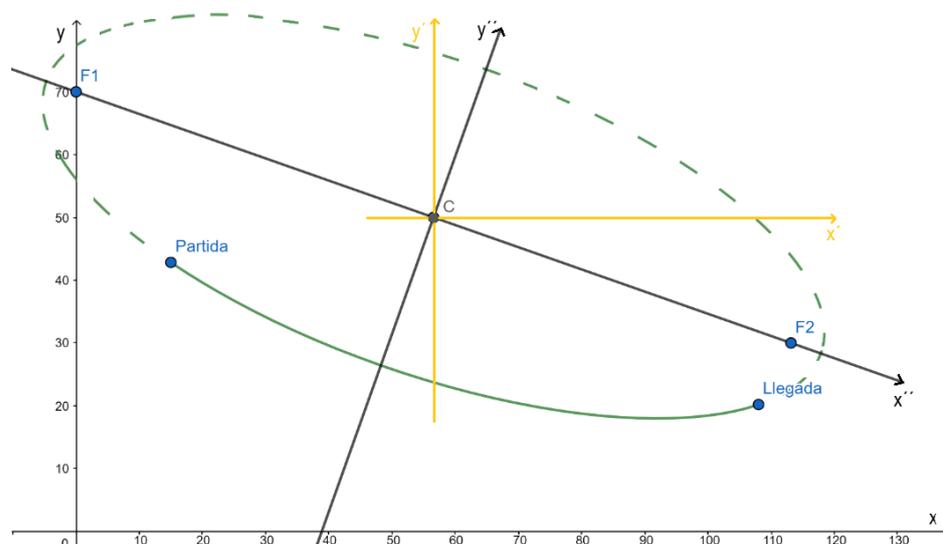
Para determinar las coordenadas del centro de la elipse respecto del sistema de referencia inicial, planteamos la siguiente suma vectorial (ver Figura [4.3.]):

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OF}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2 \quad [4.5.]$$

$$\mathbf{OC} = (0, 70) + \frac{1}{2}(80\sqrt{2}, -40) \quad [4.6.]$$

$$\mathbf{OC} = (40\sqrt{2}, 50) \quad [4.7.]$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de la elipse son:  $C(40\sqrt{2}, 50)$ .



**Figura. [4.3].** Representación gráfica de la trayectoria de la tirolesa.

**Transformación de coordenadas.**

El vector que se extiende desde el origen de coordenadas hasta un punto genérico  $P(x, y)$  se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CP} \quad [4.8.]$$

$$(x, y) = (40\sqrt{2}, 50) + (x', y') \quad [4.9.]$$

Igualando componente a componente, obtenemos:

$$\begin{cases} x = 40\sqrt{2} + x' \\ y = 50 + y' \end{cases} \quad [4.10.]$$

Las ecuaciones [4.10.] corresponden a ecuaciones de traslación entre el sistema de ejes coordenados inicial  $xy$  y un nuevo sistema de ejes coordenados  $x'y'$  paralelos a los anteriores, con origen en el centro  $C$  de la elipse (Ver Figura [4.3]).

Por otra parte, un vector  $\mathbf{CP}$  en la base  $B$  se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{CP} = k_1 \mathbf{b}_1 + k_2 \mathbf{b}_2 \quad [4.11.]$$

siendo  $k_1$  y  $k_2$  las componentes del vector en el nuevo sistema de referencia, es decir:  $x''=k_1$ ,  $y''=k_2$ . Por lo tanto, podemos escribir el vector de coordenadas  $(\mathbf{CP})_B$ :

$$(\mathbf{CP})_B = (x'', y'') \quad [4.12.]$$

Matricialmente podemos escribir:

$$\mathbf{CP} = \mathbf{Q} [\mathbf{CP}]_B \quad [4.13.]$$

donde la matriz  $\mathbf{Q}$  de transformación de coordenadas tiene por columnas los vectores de la base  $B$  y por lo tanto está dada por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} b_{1x} & b_{2x} \\ b_{1y} & b_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix} \quad [4.14.]$$

Y la matriz de coordenadas  $[\mathbf{CP}]_B$  está dada por:  $[\mathbf{CP}]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$

De la expresión [4.13.] obtenemos:

$$[CP]_B = Q^{-1} \cdot CP \quad [4.15.]$$

Observamos que, siendo  $Q$  una matriz ortogonal, se cumple que  $Q^{-1} = Q^T$ .

En el sistema de referencia  $x''y''$ , cuyos versores directores son los de la base  $B$ , podemos escribir la ecuación de la elipse:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad [4.16.]$$

La longitud del cable (130 m), coincide con la suma de las distancias a los puntos fijos llamados focos. Por lo tanto,  $2a = 130$ , de donde obtenemos el valor del semieje  $a$ :

$$a = 65 \quad [4.17.]$$

La distancia entre los focos,  $2c$ , está dada por:

$$2c = \|F_1F_2\| = \sqrt{(80\sqrt{2})^2 + (-40)^2} = 120 \quad [4.18.]$$

Es así que la semidistancia focal resulta:

$$c = 60 \quad [4.19.]$$

Calculamos el valor del semieje  $b$ , a partir de la siguiente relación:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{65^2 - 60^2} = 25 \quad [4.20.]$$

Luego la ecuación de la elipse en el sistema  $x''y''$  queda:

$$\frac{x''^2}{65^2} + \frac{y''^2}{25^2} = 1 \quad [4.21.]$$

En forma matricial podemos escribir esta última ecuación de la siguiente manera:

$$[CP]_B^T D [CP]_B + K [CP]_B + f = 0 \quad [4.22.]$$

$$\text{Siendo: } [CP]_B = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1}{65^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25^2} \end{bmatrix}, K = [0 \quad 0], f = -1$$

$$[x'' \quad y''] \begin{bmatrix} \frac{1}{65^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad [4.23.]$$

A los efectos de obtener la ecuación de la elipse en el sistema  $x'y'$ , sustituimos la expresión obtenida para la matriz de coordenadas  $[CP]_B$  :

$$[CP]_B = Q^T CP \quad [4.24.]$$

en la ecuación [4.23.]:

$$CP^T Q^{-1T} D Q^{-1} CP - 1 = 0 \quad [4.25.]$$

Reemplazamos las matrices por sus elementos y desarrollamos:

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{65^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad [4.26.]$$

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} \frac{41}{325^2} & \frac{32\sqrt{2}}{325^2} \\ \frac{32\sqrt{2}}{325^2} & \frac{153}{325^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad [4.27.]$$

$$\frac{41 x'^2}{325^2} + \frac{64 \sqrt{2} x' y'}{325^2} + \frac{153 y'^2}{325^2} = 1 \quad [4.28.]$$

Se requiere la ecuación de la trayectoria en el sistema  $xy$ , por lo que usamos las ecuaciones de traslación de coordenadas:

$$\begin{cases} x = 40\sqrt{2} + x' \\ y = 50 + y' \end{cases} \quad [4.29.]$$

Sustituimos [4.29] en [4.28] y desarrollamos:

$$\frac{41 (x - 40\sqrt{2})^2}{325^2} + \frac{64 \sqrt{2} (x - 40\sqrt{2})(y - 50)}{325^2} + \frac{153 (y - 50)^2}{325^2} = 1$$

$$41 (x - 40\sqrt{2})^2 + 64 \sqrt{2} (x - 40\sqrt{2})(y - 50) + 153 (y - 50)^2 = 325^2$$

$$41(x^2 - 80\sqrt{2}x + 3200) + 64\sqrt{2}(xy - 50x - 40\sqrt{2}y + 2000\sqrt{2}) + 153(y^2 - 100y + 2500) = 325^2$$

$$41x^2 - 3280\sqrt{2}x + 131200 + 64\sqrt{2}xy - 3200\sqrt{2}x - 5120y + 256000 + 153y^2 - 15300y + 382500 - 325^2 = 0$$

$$41x^2 + 64\sqrt{2}xy + 153y^2 - 6480\sqrt{2}x - 20420y + 664075 = 0 \quad [4.30.]$$

Debemos restringir los valores que pueden tomar las variables  $x$  e  $y$  para que representen los puntos buscados, ya que no todos los puntos de la elipse son puntos de la trayectoria (ver Figura [4.3.]).

$$\begin{cases} 41x^2 + 64\sqrt{2}xy + 153y^2 - 6480\sqrt{2}x - 20420y + 664075 = 0 \\ 15 \leq x \leq 108 \\ 20,2 \leq y \leq 42,84 \end{cases} \quad [4.31.]$$

**4.b.** Considerando que existe conservación total de la energía (no hay rozamiento con el cable), mediante un análisis energético, es necesario verificar que una persona no alcanzará una velocidad superior a los 80 km/h.

Recordemos de los principios de la Física que, si sólo la gravedad realiza trabajo, la energía mecánica total del sistema ( $E$ ) se mantiene constante. La energía mecánica del sistema se obtiene sumando la energía potencial gravitatoria ( $U$ ) y la energía cinética ( $K$ ).

$$E = U + K = cte$$

$$U = mgh$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

En el punto de partida  $P_1(15, 42.840)$ , tenemos:

$$U_1 = mgy_1 \quad [4.32.]$$

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0 \quad [4.33.]$$

$$E_1 = U_1 + K_1 = mgy_1 \quad [4.34.]$$

**Punto de máxima velocidad.**

El punto de máxima velocidad será el punto de altura mínima, donde tendremos el mínimo valor de energía potencial gravitatoria (U) y el máximo valor de energía cinética (K). Podemos averiguar este valor obteniendo el punto de la trayectoria donde la pendiente de la curva es nula. Para obtener dicho punto, a partir de la ecuación de la elipse dada por:

$$41x^2 + 64\sqrt{2}xy + 153y^2 - 6480\sqrt{2}x - 20420y + 664075 = 0 \quad [4.35.]$$

derivamos implícitamente:

$$82x + 64\sqrt{2}(xy' + y) + 306y y' - 6480\sqrt{2} - 20420y' = 0 \quad [4.36.]$$

$$y'(64\sqrt{2}x + 306y - 20420) = -82x - 64\sqrt{2}y + 6480\sqrt{2} \quad [4.37.]$$

$$y' = \frac{-82x - 64\sqrt{2}y + 6480\sqrt{2}}{64\sqrt{2}x + 306y - 20420} \quad [4.38.]$$

Igualamos a cero:

$$0 = \frac{-82x - 64\sqrt{2}y + 6480\sqrt{2}}{64\sqrt{2}x + 306y - 20420} \quad [4.39.]$$

$$0 = -82x - 64\sqrt{2}y + 6480\sqrt{2} \quad [4.40.]$$

y obtenemos

$$y = \frac{-82x + 6480\sqrt{2}}{64\sqrt{2}} \quad [4.41.]$$

Reemplazamos en la ecuación general de la elipse:

$$41x^2 + 64\sqrt{2}x \frac{-82x + 6480\sqrt{2}}{64\sqrt{2}} + 153 \left( \frac{-82x + 6480\sqrt{2}}{64\sqrt{2}} \right)^2 - 6480\sqrt{2}x - 20420 \frac{-82x + 6480\sqrt{2}}{64\sqrt{2}} + 664075 = 0 \quad [4.42.]$$

$$41x^2 - 82x^2 + 6480\sqrt{2}x + \frac{153}{8192} (6724x^2 - 1062720\sqrt{2}x + 83980800) - 6480\sqrt{2}x + \frac{209305x}{8\sqrt{2}} - 2067525 + 664075 = 0$$

$$\frac{692900}{8192}x^2 - 9569.42x + 165039.0625 = 0 \quad [4.43.]$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado obtenida son:

$$x_a = 21.23 \quad [4.44.]$$

$$x_b = 91.9066 \quad [4.45.]$$

La raíz  $x_b=91.9066$  es la que debemos considerar para el cálculo del punto de mínima altura, mientras que  $x_a=21.23$  corresponde al punto de máxima altura (que está fuera de los puntos posibles de la trayectoria).

Reemplazamos  $x_b$  en la ecuación general de la elipse para hallar el valor de  $y_{min}$ , con el cual podemos determinar la energía potencial gravitatoria asociada  $U_2 = U_{min} = mgy_{min}$ . La energía cinética  $K_2$  en dicho punto, será la correspondiente a la máxima velocidad.

$$y_{min} = 17.9844m \quad [4.46.]$$

$$U_2 = U_{min} = mgy_{min} \quad [4.47.]$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad [4.48.]$$

Considerando que

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = cte \quad [4.49.]$$

Reemplazamos [4.34.], [4.47.] y [4.48] en [4.49.]:

$$mgy_1 = mgy_{min} + \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad [4.50.]$$

De esta expresión podemos evaluar la velocidad máxima:

$$g(y_1 - y_{min}) = \frac{1}{2}v_{max}^2 \quad [4.51.]$$

$$v_{max} = 22.08 \frac{m}{s} \frac{3600s}{1h} \frac{1km}{1000m} = 79.5 \frac{km}{h} \quad [4.52.]$$

Por lo tanto, se verifica que  $v_{max} < 80$  km/h.

**4.c.** Se requiere la verificación de que la trayectoria de la tirolesa no será interrumpida por el bosque.

Si bien sabemos que el punto de altura mínima del recorrido será cercano a los 18 metros, éste se produce a 91.9 metros de la base, por lo que deberemos evaluar el valor de la variable  $y$  para el rango de valores de  $x$  en los que se encuentra el bosque, es decir, para  $55 \leq x \leq 75$ .

Sabemos que la pendiente de la elipse es negativa en ese rango de valores, debido a que ésta cambia de signo en  $x_b=21.23$  y en  $x_a=91.9$ . Esto nos garantiza que la ordenada  $y$  será decreciente desde  $x_b=21.23$  hasta  $x_a=91.9$ . Por ello, evaluamos el valor de  $y$  para  $x=75$ , y podemos garantizar que para el resto de los valores de  $x$  que pasan por encima del bosque, tendremos alturas superiores a la correspondiente a la abscisa  $x=75$ .

Reemplazamos el valor mencionado de  $x$  en la ecuación de la elipse:

$$41x^2 + 64\sqrt{2}xy + 153y^2 - 6480\sqrt{2}x - 20420y + 664075 = 0 \quad [4.53.]$$

$x=75$ :

$$41(75)^2 + 64\sqrt{2}(75)y + 153y^2 - 6480\sqrt{2}(75) - 20420y + 664075 = 0$$

$$153y^2 + (4800\sqrt{2} - 20420)y - 486000\sqrt{2} + 894700 = 0 \quad [4.54.]$$

Resolvemos la ecuación cuadrática y obtenemos:

$$y_1 = 69.629 \quad [4.55.]$$

$$y_2 = 19.468 \quad [4.56.]$$

El punto de la trayectoria que estamos evaluando es  $(75, 19.468)$ , que tiene una altura superior a los 18 metros de los picos del bosque. Por lo tanto, queda verificado que no habrá problema al atravesar este lugar.

## 2.5.

### Problema 5. Modelos de reconocimiento facial.

Se desea diseñar un programa computacional para un sistema de seguridad que permita el reconocimiento facial de un individuo y logre identificarlo a partir de una base de datos.

**Área Temática:** Ingeniería. Computación. Biometría. Procesamiento de imágenes.

**Nivel:** AVANZADO 

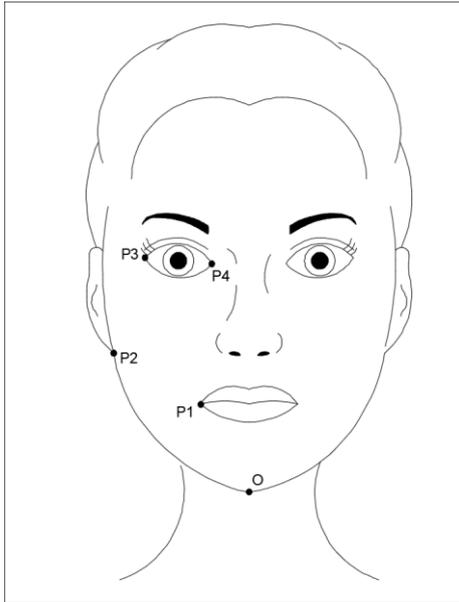
#### Descripción del problema.

Se cuenta con una tecnología que logra identificar ciertos puntos característicos del rostro a partir de una imagen digital del mismo. El principal objetivo es optimizar el proceso de búsqueda mediante la reducción del tiempo y costo computacional, para que el programa sea útil incluso con bases de datos extensas.

Se estudian dos alternativas para estructurar la búsqueda. La primera que surge naturalmente, una vez reconocidas las coordenadas de los puntos preestablecidos del rostro del individuo, es identificar al mismo a partir de la comparación directa entre dichas coordenadas y las de la base de datos existente. Este primer planteo, si bien es simple, puede no ser eficiente en cuanto al costo computacional asociado. Por lo tanto, se propone una alternativa que permita asociar la mayor cantidad de información a la menor cantidad de parámetros posible y así mejorar el proceso de búsqueda.

A modo ilustrativo, y por simplicidad en el desarrollo del problema, se asumen como hipótesis que el rostro es simétrico respecto de su eje central y se trabaja sobre el plano, es decir, en dos dimensiones. Téngase en cuenta que, en la realidad, dicha tecnología se complejiza introduciendo mayor cantidad de parámetros y sin considerar las hipótesis previas.

Se cuenta con la información de un individuo que se muestra en la Figura [5.1], obtenida a partir de la tecnología de reconocimiento facial.



**Figura. [5.1].** Puntos característicos que se registran a partir de la imagen digital del rostro.

En la Tabla [5.1] se detallan las coordenadas de los puntos característicos para un individuo en particular, respecto a un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el punto O (ver Figura [5.1]).

Punto	$x_i$ [cm]	$y_i$ [cm]
O	0.0	0.0
P1	-1.9	3.1
P2	-4.8	4.9
P3	-3.8	8.2
P4	-1.4	8.0

**Tabla. [5.1].** Coordenadas rectangulares de los puntos característicos del rostro de un individuo.

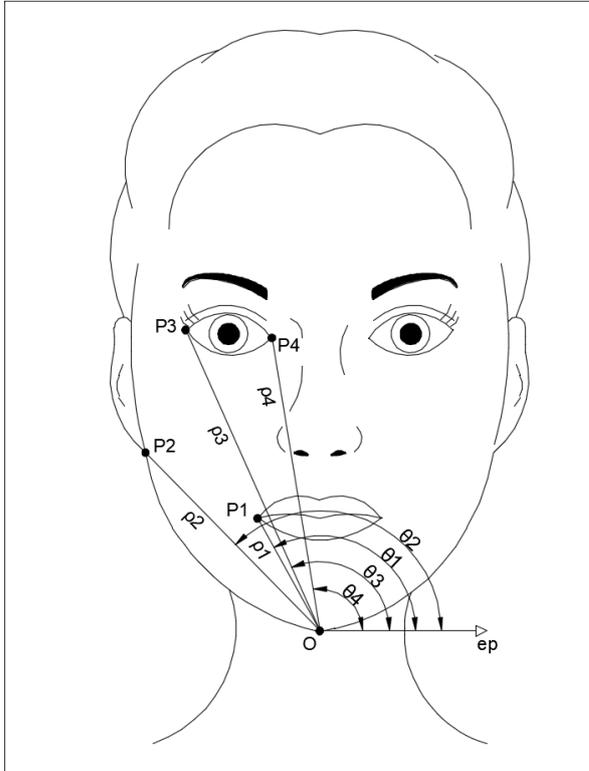
### Desarrollo de la solución.

Como se mencionó previamente, la primera propuesta de búsqueda consiste en la comparación directa de las coordenadas de los puntos obtenidos  $P_1$  a  $P_4$  del individuo a identificar, con las coordenadas de los puntos registrados en la base de datos. Observe que la cantidad total de valores a comparar son ocho (dos coordenadas por cada punto).

### Propuesta de optimización de parámetros.

La variante de búsqueda planteada consiste en asociar la mayor cantidad de datos disponibles a la menor cantidad de parámetros significativos posible. Para ello, se

utilizarán rectas auxiliares trazadas convenientemente entre los puntos dato y se obtendrá cierto ángulo entre ellas, que se utilizará para dirigir la búsqueda. Se opta por trabajar en un sistema de coordenadas polares con el polo en coincidencia con el punto O (según Figura [5.2]).



**Figura. [5.2].**  
Coordenadas polares de los puntos característicos de un rostro.

**5.a.** Es necesario realizar la transformación de las coordenadas correspondientes a los puntos datos de un sistema rectangular a un sistema polar.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \end{cases} \quad [5.1.]$$

los datos registrados en Tabla [5.1] se indican en coordenadas polares en la Tabla [5.2], según la Figura [5.2].

Punto	$\rho_i$ [cm]	$\theta_i$ [°]	$\theta_i$ [rad]
O	0.0	-	-
P1	3.6	121.5	2.1
P2	6.9	134.4	2.3
P3	9.0	114.9	2.0
P4	8.1	99.9	1.7

**Tabla. [5.2].**  
Coordenadas polares de los puntos característicos del rostro de un individuo.

Se utiliza una recta auxiliar  $L_A$  que contiene a  $P_1$  y  $P_3$  y una recta  $L_B$  que contiene a  $P_2$  y  $P_4$ . La ecuación de la recta en coordenadas polares está dada a partir de la siguiente expresión:

$$L: \rho = \frac{\rho_L}{\cos(\theta - \theta_L)} \quad [5.2.]$$

Las coordenadas  $(\rho_L, \theta_L)$  corresponden a un punto  $P_L$  de la recta que se encuentra a la mínima distancia del polo, el cual es necesario conocer para escribir la ecuación de la recta en coordenadas polares.

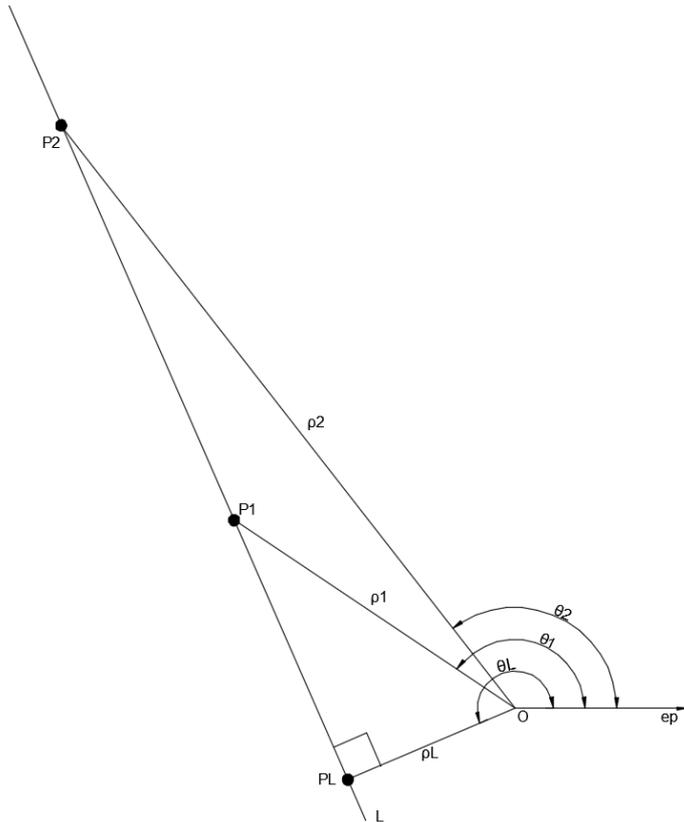
**5.b.** Determine una expresión que permita obtener, a partir de dos puntos datos, el valor de  $\theta_L$  correspondiente a la coordenada del punto  $P_L$  que permite describir a una recta  $L$  en un sistema polar. Interprete gráficamente la expresión obtenida y a partir de la misma encuentre las ecuaciones de las rectas  $L_A$  y  $L_B$ . Represente gráficamente ambas rectas en un mismo sistema polar.

En la Figura [5.3] se muestra una recta  $L$  que pasa por dos puntos conocidos en coordenadas polares.

Los puntos  $P_1(\rho_1, \theta_1)$  y  $P_2(\rho_2, \theta_2)$ , pertenecen a la recta  $L$ , por lo tanto, sus coordenadas satisfacen la ecuación [5.2]. Es decir,

$$\rho_L = \rho_1 \cos(\theta_L - \theta_1) \quad [5.3.]$$

$$\rho_L = \rho_2 \cos(\theta_L - \theta_2) \quad [5.4.]$$



**Figura. [5.3].**  
Recta que pasa por  
dos puntos P1 y P2  
en coordenadas  
polares.

Utilizando la identidad trigonométrica  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$  en las ecuaciones [5.3.] y [5.4.], éstas resulta:

$$\rho_1 \cos(\theta_1) \cos(\theta_L) + \rho_1 \sin(\theta_1) \sin(\theta_L) = \rho_L \quad [5.5.]$$

$$\rho_2 \cos(\theta_2) \cos(\theta_L) + \rho_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_L) = \rho_L \quad [5.6.]$$

Igualando ambas expresiones y operando, llegamos a la siguiente relación para  $\theta_L$  en función de las coordenadas de los puntos  $P_1(\rho_1, \theta_1)$  y  $P_2(\rho_2, \theta_2)$ :

$$\operatorname{tg}(\theta_L) = \frac{\rho_1 \cos(\theta_1) - \rho_2 \cos(\theta_2)}{\rho_2 \sin(\theta_2) - \rho_1 \sin(\theta_1)} \quad [5.7.]$$

Teniendo en cuenta la convención establecida, el ángulo  $\theta_L$  es medido desde el eje polar en sentido antihorario. Por ello, para determinar la magnitud real del mismo, se deberá evaluar en qué cuadrante se encuentra el punto  $P_L$  analíticamente (a través de los signos de sus coordenadas o geoméricamente a partir del gráfico), y adicionar o no  $180^\circ$  según corresponda. Una vez definido el ángulo  $\theta_L$  es posible evaluar  $\rho_L$  con alguna de las dos expresiones anteriores ([5.3.] o [5.4.]).

Aplicamos las relaciones obtenidas, a los datos de la Tabla [5.2], para obtener

$P_A(\rho_A, \theta_A)$  y  $P_B(\rho_B, \theta_B)$ , los puntos a mínima distancia del polo correspondientes a las rectas  $L_A$  y  $L_B$  respectivamente (recordamos que  $L_A$  la recta que pasa por  $P_1$  y  $P_3$ , y  $L_B$  la recta que pasa por  $P_2$  y  $P_4$ , según Figura [5.4]). Los resultados se muestran en la Tabla [5.3].

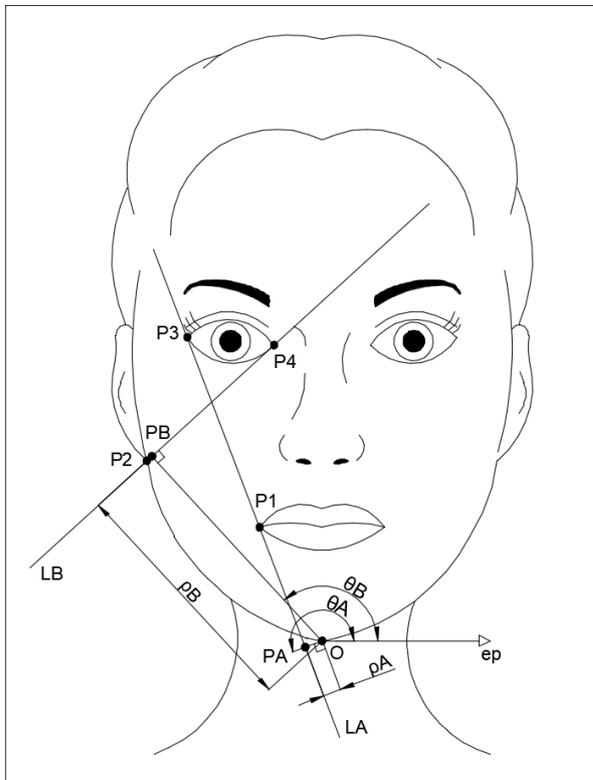
	$L_A$		$L_B$
$\theta_A'$ [rad]	0.4	$\theta_B'$ [rad]	-0.8
$\theta_A'$ [°]	20.4	$\theta_B'$ [°]	-47.6
$\theta_A$ [°]	200.4	$\theta_B$ [°]	132.4
$\theta_A$ [rad]	3.5	$\theta_B$ [rad]	2.3
$\rho_A'$ [cm]	0.7	$\rho_B$ [cm]	6.9

**Tabla. [5.3].**  
Coordenadas polares de los puntos  $P_A(\rho_A, \theta_A)$  y  $P_B(\rho_B, \theta_B)$  de las rectas  $L_A$  y  $L_B$ .

Por lo tanto, las ecuaciones de las rectas  $L_A$  y  $L_B$  están dadas por:

$$L_A: \rho = \frac{0.7}{\cos(\theta - 3.5)} \tag{5.8}$$

$$L_B: \rho = \frac{6.9}{\cos(\theta - 2.3)} \tag{5.9}$$



**Figura. [5.4].**  
Rectas auxiliares  $L_A$  y  $L_B$ .

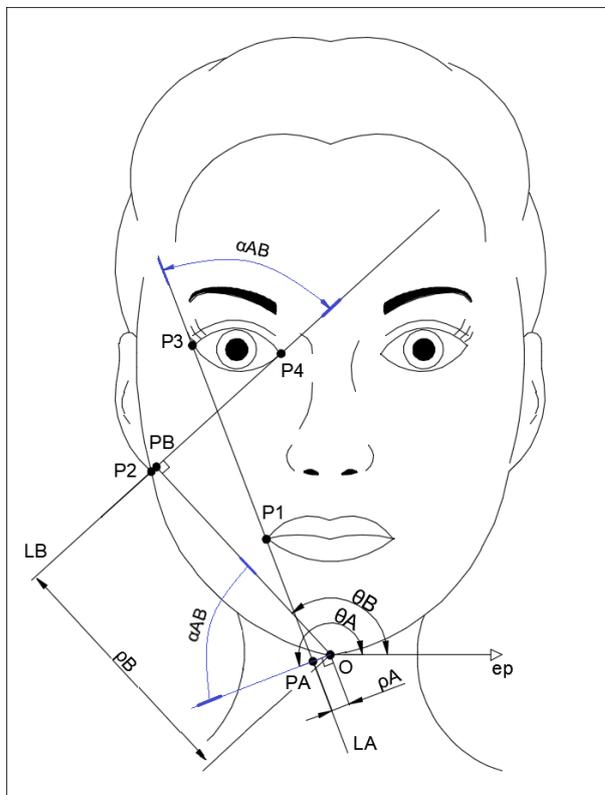
A partir de las rectas  $L_A$  y  $L_B$ , se propone obtener el dato auxiliar  $\alpha_{AB}$ , dado por el ángulo entre ambas rectas, y utilizarlo para una primera etapa de estudio, con el

objeto de acotar el rango de búsqueda en la base de datos existente. Luego, una segunda y una tercera etapa de búsqueda se realizan a partir de los parámetros  $\rho_A$  y  $\theta_A$  que definen a  $L_A$ . Para ello, es necesario que la base de datos cuente con el cálculo previo de los valores  $\alpha_{AB}$ ,  $\rho_A$  y  $\theta_A$  para todos los individuos.

*Nota:* Observe que estos tres parámetros están asociados a los cuatro puntos datos, y a los ocho valores que definen sus coordenadas. Se busca adoptar caracteres geométricos de mayor significancia, cuya existencia en algún individuo de la base de datos resulte con una probabilidad de ocurrencia menor relativa al resto de los caracteres. Esta propuesta de búsqueda resulta en un proceso más eficiente en términos de tiempo.

**5.c.** Determine el ángulo  $\alpha_{AB}$  definido entre las rectas  $L_A$  y  $L_B$  (ángulo con apertura hacia el ojo del individuo). Grafique.

Como se muestra en la Figura [5.5], el ángulo entre las rectas  $L_A$  y  $L_B$  puede calcularse por la diferencia  $\alpha_{AB} = \theta_A - \theta_B$ . Por lo tanto,  $\alpha_{AB} = 68.1^\circ$ .



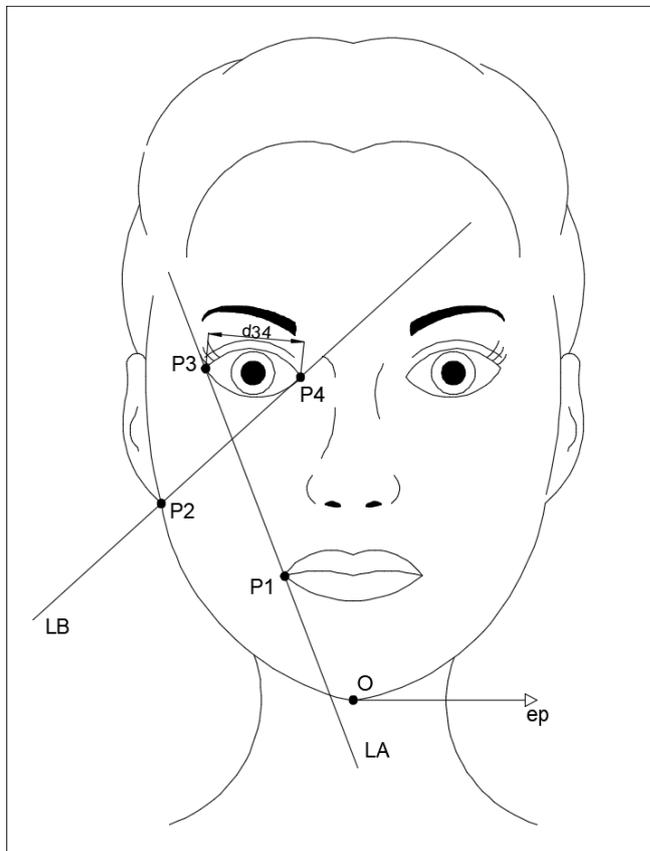
**Figura. [5.5].** Ángulo  $\alpha_{AB}$  comprendido entre las rectas  $L_A$  y  $L_B$ .

**5.d.** De no lograrse la identificación completa del individuo aún (es decir, que exista más de un individuo en la base de datos con esas características), se continúa introduciendo la distancia  $d_{34}$ , entre  $P_3(\rho_3, \theta_3)$  y  $P_4(\rho_4, \theta_4)$ . Determine dicha distancia.

La distancia entre ambos puntos (ver Figura [5.6]) está dada por la siguiente expresión:

$$d_{34}^2 = \rho_3^2 + \rho_4^2 - 2\rho_3\rho_4\cos(\theta_4 - \theta_3) \quad [5.10.]$$

Para los datos analizados tenemos entonces que  $d_{34} = 2.4\text{cm}$ .



**Figura. [5.6].**  
Distancia  $d_{34}$  entre los puntos  $P_3$  y  $P_4$ .

**5.e.** A partir de los valores  $\alpha_{AB}$ ,  $\rho_A$ ,  $\theta_A$  y  $d_{34}$  obtenidos en el reconocimiento, identifique el individuo utilizando la porción de una base de datos indicada en la Tabla [5.4].

Identificación	$\alpha_{AB}$ [°]	$\rho_A$ [cm]	$\theta_A$ [°]	$d_{34}$ [cm]	$\theta_1$ [°]	$\theta_2$ [°]	$\theta_3$ [°]	$\theta_4$ [°]
1134764	37.1	1.2	203.2	3.3	130.8	226.1	120.0	100.3
1134765	67.2	1.3	197.5	2.8	126.0	135.6	115.2	98.8
1134766	68.1	0.7	200.4	2.9	121.5	134.4	114.9	99.9
1134767	68.1	0.7	200.4	3.1	121.0	132.3	114.9	100.6
1134768	69.0	0.8	200.4	2.4	122.0	133.9	115.2	100.5

**Tabla. [5.4].** Porción de una base de datos para la identificación del individuo.

Los resultados obtenidos en el análisis anterior se muestran en la Tabla [5.5]. Dicha información: ¿resulta suficiente para caracterizar completamente a un individuo?, ¿podría existir más de un caso con estos valores?

$\theta_A$	$\rho_A$	$\alpha_{AB}$	$d_{34}$
200,4°	0,7 cm	68.1°	2.9 cm

**Tabla. [5.5].** Información obtenida de un individuo.

Analizando los parámetros, se observa que los valores coinciden con el individuo de identificación N° 1134766.

En caso de no encontrar una coincidencia con tales valores, se finaliza el proceso con etapas consecutivas de búsqueda con los valores  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$ . Observe que, para una caracterización definitiva, es necesario contar con los siguientes datos:  $\alpha_{AB}$ ,  $\rho_A$ ,  $\theta_A$ ,  $d_{34}$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$ . Un total de ocho valores, es decir la misma cantidad que los que se hubiesen requerido para la primera variante de diseño. La diferencia en la eficiencia del proceso radica en la estructuración de la búsqueda y los valores geométricos utilizados en la misma.

**5.f.** Obtenga y grafique los lugares geométricos asociados al rostro del individuo con identificación N° 1134765 de la Tabla [5.4]. y realice un dibujo aproximado del mismo. Verifique que la información brindada resulta suficiente para posicionar los puntos característicos del rostro.

En la Tabla [5.6] transcribimos los datos para el individuo solicitado:

Identificación	$\alpha_{AB}$ [°]	$\rho_A$ [cm]	$\theta_A$ [°]	$d_{34}$ [cm]	$\theta_1$ [°]	$\theta_2$ [°]	$\theta_3$ [°]	$\theta_4$ [°]
1134765	67.2	1.3	197.5	2.8	126.0	135.6	115.2	98.8

**Tabla. [5.6].** Datos del individuo solicitado.

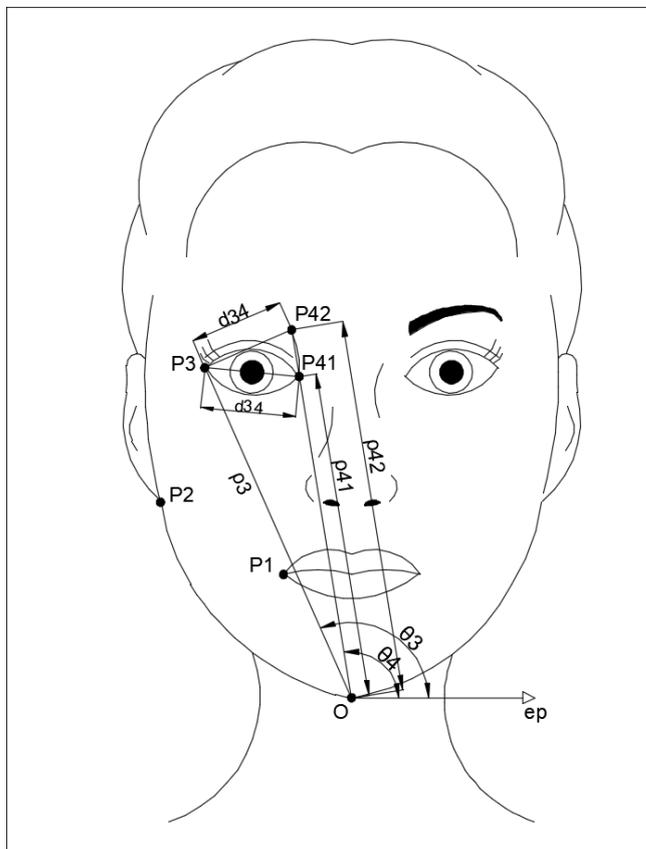
Para este caso, la ecuación de la recta  $L_A$ , conociendo  $\rho_A$  y  $\theta_A = 197.5^\circ$  (o bien considerando  $\theta_A = 3.4$  rad), resulta:

$$\rho = \frac{1.3}{\cos(\theta - 3.4)} \quad [5.11.]$$

Los puntos  $P_1(\rho_1, \theta_1)$  y  $P_2(\rho_2, \theta_2)$  son puntos de la recta  $L_A$ , por lo tanto, sus coordenadas satisfacen su ecuación. Así, mediante la expresión [5.11] obtenemos los valores de la coordenada  $\rho$  a partir de la coordenada conocida  $\theta$ :  $\rho_1 = 4.1\text{cm}$  y  $\rho_2 = 9.7\text{cm}$ .

A partir de la expresión [5.10] podemos determinar el valor de  $\rho_4$  a partir de los valores de  $d_{34}$ ,  $\rho_3$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$ :

$$\rho_4^2 - [2\rho_3 \cos(\theta_4 - \theta_3)]\rho_4 + [\rho_3^2 - d_{34}^2] = 0 \quad [5.12.]$$



**Figura. [5.7].** Puntos  $P_{41}$  y  $P_{42}$  a una distancia  $d_{34}$  de  $P_3$  cuya coordenada  $\theta$  es  $\theta_4 = 98.8^\circ$ .

De la ecuación [5.12.] se obtienen dos resultados:  $\rho_{41} = 8.7\text{cm}$  y  $\rho_{42} = 9.9\text{cm}$ .

Observe que el valor que nos interesa, de acuerdo al contexto del problema asociado a la forma de un rostro humano, es el menor. Es decir, el punto  $P_{41}$  más cercano al polo en la Figura [5.7].

Por lo tanto, adoptamos el menor valor:  $\rho_4 = 8.7\text{cm}$ .

Sabiendo que  $\alpha_{AB} = \theta_A - \theta_B$ , con los valores de  $\alpha_{AB}$  y  $\theta_A$  calculamos  $\theta_B = 130.3^\circ$ , o bien  $\theta_B = 2.3\text{rad}$ .

Como  $P_4(\rho_4, \theta_4)$  es un punto de la recta  $L_B$ , utilizamos la expresión de la recta [5.2] y calculamos  $\rho_B = \rho_4 \cos(\theta_4 - \theta_B) = 7.4\text{cm}$ .

Luego la ecuación de la recta  $L_B$  está dada por:

$$L_B: \rho = \frac{7.4}{\cos(\theta - 2.3)} \quad [5.13.]$$

Para finalizar, utilizamos la ecuación [5.13] para obtener las coordenadas polares del punto  $P_2(\rho_2, \theta_2)$ .

Las coordenadas de los puntos característicos obtenidos se muestran en la Tabla [5.7].

Punto	$\rho_i$ [cm]	$\theta_i$ [°]	$\theta_i$ [rad]
P1	4.1	126.0	2.2
P2	7.4	135.6	2.4
P3	9.7	115.2	2.0
P4	8.7	98.8	1.7

**Tabla. [5.7].** Puntos característicos del individuo solicitado, a partir de los datos disponibles.

### Desafío:

**5.g.** Obtenga de manera aproximada la información necesaria del rostro de algún integrante del grupo ayudado por un elemento de medición. Dibuje y obtenga los valores necesarios para la búsqueda.

## 2.6.

### Problema 6. Epicentro de un sismo.

Cuando se produce un sismo, resulta útil conocer el lugar exacto del epicentro, que es el punto sobre la superficie de la Tierra que se encuentra en la proyección vertical del hipocentro o foco, punto bajo la superficie donde se origina el sismo.

**Área Temática:** Ingeniería Civil. Sismología.

**Nivel:** INTERMEDIO 

#### Descripción del problema.

Una manera simple de efectuar la localización del epicentro de un sismo es a partir de una triangulación. Para ello, es necesario disponer, como mínimo, de los datos de tres estaciones sismológicas que son las encargadas de registrar y transmitir las señales ocasionadas por el movimiento.

Durante un evento sísmico, se generan ondas elásticas de diversos tipos que se propagan en todas las direcciones, entre ellas las ondas sísmicas P (primarias) y las ondas sísmicas S (secundarias).

Por sus características de propagación, estas ondas viajan a diferentes velocidades, siendo la onda P más veloz que la onda S. Por este motivo, la onda P se va alejando paulatinamente de la onda S a medida que nos apartamos del hipocentro (y del epicentro).

Por lo tanto, mientras más lejos se encuentre una estación del hipocentro (o epicentro) del sismo, mayor será la diferencia de tiempo de llegada entre la onda P y la onda S.

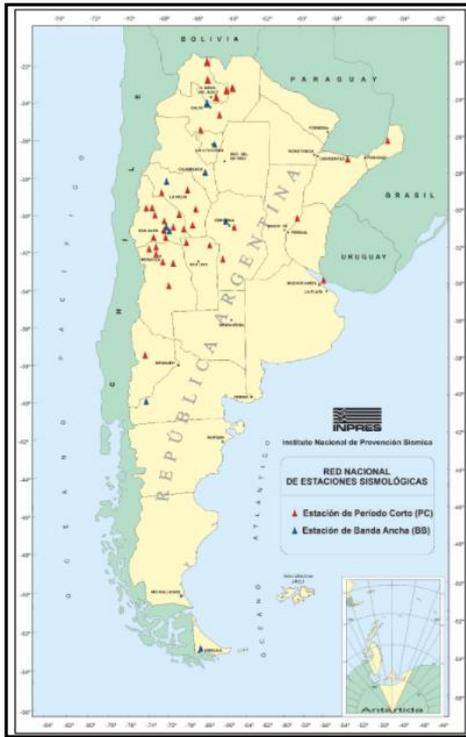
Es así que esta diferencia de tiempo ( $T_{S-P}$ ) de llegada entre la onda P y la onda S, proporciona una medida de cuán distante está el hipocentro (o epicentro) del lugar de medición. El método es análogo al utilizado para estimar la distancia a la que cayó un rayo, cuando consideramos la diferencia en tiempo entre la llegada del relámpago (luz) y el trueno (sonido).

Simplificaremos el análisis considerando a la corteza terrestre compuesta por una sola capa completamente homogénea. Así, consideramos constante la velocidad de onda y, a partir de ella, podemos saber el recorrido en kilómetros que le demanda el tiempo  $T_{s-p}$ . Entonces, cuando una estación registra la señal sísmica, se determina la distancia a la que se encuentra el hipocentro, pero no se sabe en qué dirección está. Por ello, las posibles ubicaciones del hipocentro forman una semiesfera con centro en la estación receptora, y de radio igual a la distancia recorrida. Si el sismo es de poca profundidad y consideramos la situación en un mapa (reduciendo a un problema bidimensional), las posibles ubicaciones del epicentro corresponden a una circunferencia de igual radio (aproximado) que la semiesfera mencionada. Combinando la información de tres estaciones, y construyendo estas circunferencias en cada estación, las mismas deberían interceptarse en un solo punto, cuyas coordenadas nos permiten ubicar de manera aproximada el epicentro.

Es importante notar que, en la práctica, el error siempre está presente, tanto en los datos como en la suposición de que el camino de la onda es rectilíneo y que la velocidad de propagación es conocida. Por ello, la dispersión en la intersección siempre ocurre.

Este procedimiento, simplificado y manual, permite determinar únicamente el epicentro de sismos superficiales, es decir, a menos de 30 km de profundidad. Se conoce como el Método de los Círculos y era utilizado antes del empleo de programas más sofisticados y modernos. En la actualidad se utiliza la información de varias estaciones y se consideran otros aspectos, por ejemplo, las características del medio por el que viajan las ondas.

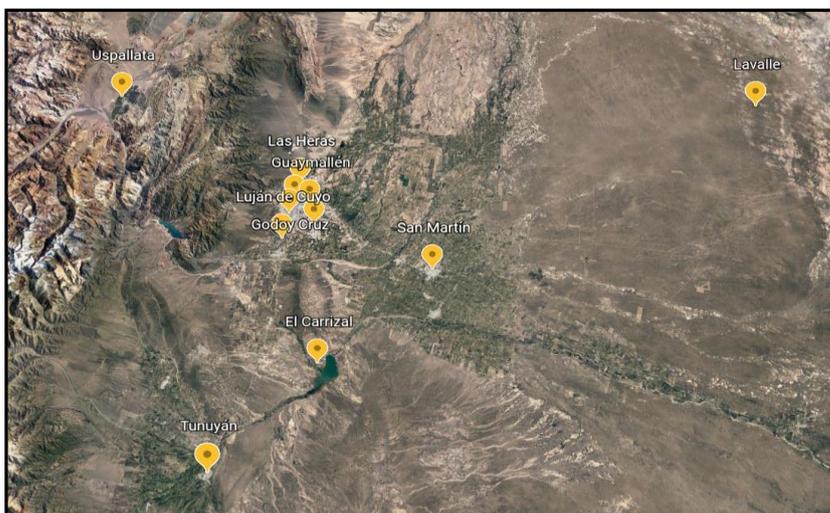
El INPRES, Instituto Nacional de Prevención Sísmica, tiene a su cargo la instalación y el mantenimiento de la Red Nacional de Acelerógrafos (RNA). La misma cuenta en la actualidad con 143 aparatos, distribuidos en todo el país. Los registros sísmicos de las estaciones son ingresados a una computadora para su procesamiento, empleando programas específicos basados en cálculos realizados sobre modelos matemáticos, con iteraciones de prueba y error, que confieren valores con probabilidades máximas de ubicación. Como resultado final, se obtiene la ubicación geográfica, la profundidad y la hora en la cual ocurrió el evento.



**Figura. [6.1].** Sitios de emplazamiento de acelerógrafos en la República Argentina.  
<http://contenidos.inpres.gov.ar/acelerografos/RNA>

**6.a.** Una señal de origen sísmico es registrada por la Red Nacional de Acelerógrafos. La información registrada se muestra en la Tabla [6.1]. Seleccione las tres estaciones más cercanas al epicentro y plantee un sistema de referencia plano, que luego se utilizará para ubicar el epicentro usando del Método de los Círculos descrito previamente.

**Desarrollo de la solución.**



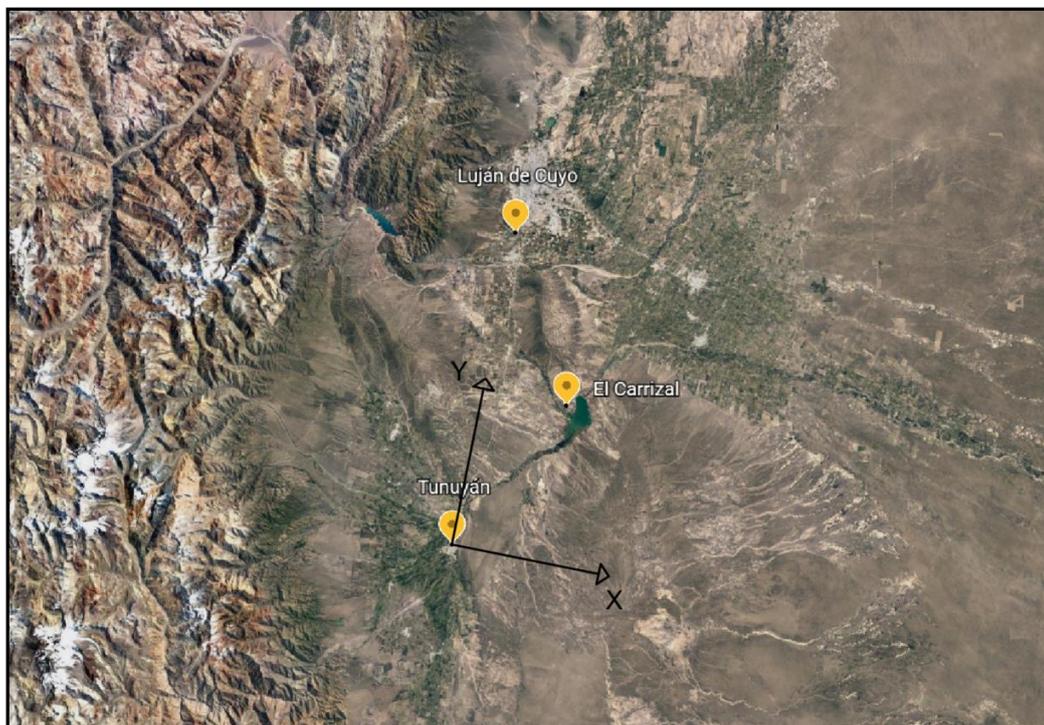
**Figura. [6.2].** Sitios de emplazamiento de acelerógrafos en la República Argentina cercanos al evento.

Los acelerógrafos más cercanos a la fuente resultan el de Tunuyán, el de El Carrizal y el de Luján de Cuyo, tal como puede observarse en la Tabla [6.1.]. A partir de estos tres, se determinará de manera aproximada la localización del epicentro.

<b>Acelerógrafo</b>	<b>Distancia a la Fuente</b>
<b>El Carrizal</b>	<b>29.50 km</b>
Godoy Cruz	45.91 km
Guaymallén	50.51 km
Las Heras	55.90 km
Lavalle	158.12 km
<b>Luján de Cuyo</b>	<b>43.70 km</b>
Maipú	45.70 km
Mendoza	50.36 km
San Martín	59.10 km
<b>Tunuyán</b>	<b>25.89 km</b>
Uspallata	85.11 km

**Tabla. [6.1].**  
Distancia a la fuente  
de los diversos  
acelerógrafos  
considerados.

Por simplicidad, se asume que las estaciones de registro se encuentran a una misma altura y que el sismo es superficial, por lo que se trabajará con un sistema plano. A modo de referencia, se define un sistema coordenado con origen en la estación de Tunuyán, eje  $y$  con dirección y sentido positivo hacia la estación de Luján de Cuyo, como se indica en la Figura [6.3].



**Figura. [6.3].** Sistema de referencia adoptado.

La Tabla [6.2] indica las coordenadas correspondientes a las estaciones consideradas y sus respectivas distancias a la fuente.

Estación	Coordenada X	Coordenada Y	Distancia a la Fuente
El Carrizal	17.38	32.91	29.50 km
Luján de Cuyo	00.00	66.00	43.70 km
Tunuyán	00.00	00.00	25.89 km

**Tabla. [6.2].** Estaciones de registro a considerar.

**6.b.** Utilizando la definición de circunferencia, encuentre gráfica y analíticamente la ubicación del evento sísmico en superficie. Justifique cada paso del proceso analítico.

En primer lugar, pondremos en evidencia los datos con los que contamos. Estos son las coordenadas de los tres puntos fijos que definen la posición de los acelerógrafos de registro, así como también, las distancias entre dichos puntos y el epicentro.

Teniendo en cuenta la información previa, podemos utilizar el concepto de circunferencia como herramienta para determinar la localización del epicentro. Es decir, el lugar geométrico de los infinitos puntos que están a una distancia  $r$  de cada estación.

Se definen entonces tres circunferencias con centros en las coordenadas de las estaciones sismológicas asociadas. Los radios de dichas circunferencias son las distancias entre las mismas y el punto buscado (ver Tabla [6.3]).

Ubicación	Ci	h	k	r
El Carrizal	C1	17.38	32.91	29.50
Luján de Cuyo	C2	0.00	66.00	43.70
Tunuyán	C3	0.00	0.00	25.89

**Tabla. [6.3].** Centros y radios de las circunferencias a considerar.

Dada una circunferencia con centro  $C(h, k)$  y radio  $r$ , su ecuación cartesiana está dada por:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad [6.1.]$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \quad [6.2.]$$

Luego, la ecuación de la circunferencia  $C_1$  con centro  $C_1(h_1, k_1)$  y radio  $r_1$  resulta:

$$x^2 + y^2 - 2h_1x - 2k_1y + h_1^2 + k_1^2 - r_1^2 = 0 \quad [6.3.]$$

$$x^2 + y^2 - 34.76x - 65.82y + 514.88 = 0 \quad [6.4.]$$

La ecuación general de la circunferencia  $C_2$  con centro  $C_2(h_2, k_2)$  y radio  $r_2$  queda:

$$x^2 + y^2 - 2h_2x - 2k_2y + h_2^2 + k_2^2 - r_2^2 = 0 \quad [6.5.]$$

$$x^2 + y^2 - 132.00y + 2446.31 = 0 \quad [6.6.]$$

La ecuación general de la circunferencia  $C_3$  con centro  $C_3(h_3, k_3)$  y radio  $r_3$  es:

$$x^2 + y^2 - 2h_3x - 2k_3y + h_3^2 + k_3^2 - r_3^2 = 0 \quad [6.7.]$$

$$x^2 + y^2 - 670.29 = 0 \quad [6.8.]$$

El punto de intersección entre las tres circunferencias será el punto buscado.

Se plantea primero la intersección entre  $C_1$  y  $C_2$ . Como estrategia algebraica, restamos miembro a miembro sus ecuaciones:

$$-2h_1x - 2k_1y + h_1^2 + k_1^2 - r_1^2 - (-2h_2x - 2k_2y + h_2^2 + k_2^2 - r_2^2) = 0 \quad [6.9.]$$

$$2(h_2 - h_1)x + 2(k_2 - k_1)y + h_1^2 + k_1^2 - h_2^2 - k_2^2 + r_2^2 - r_1^2 = 0 \quad [6.10.]$$

$$-34.80x + 66.20y - 1931.39 = 0 \quad [6.11.]$$

Observe que se obtiene la ecuación de una recta correspondiente al eje radical de la familia de circunferencias que pasan por la intersección entre  $C_1$  y  $C_2$ . En dicha recta, se encuentran contenidos los puntos de intersección entre ambas circunferencias. Uno de estos dos puntos corresponde al punto buscado. Para encontrar sus coordenadas, se procede a determinar las dos intersecciones previas y luego verificar cuál de ellas cumple además con la ecuación [6.8] de  $C_3$ .

Para encontrar la intersección, planteamos un sistema de ecuaciones entre alguna de las dos circunferencias  $C_1$  o  $C_2$ , y la recta correspondiente al eje radical. Utilizaremos la circunferencia  $C_1$ :

Circunferencia  $C_1$  con centro  $C_1(h_1, k_1)$  y radio  $r_1$ :

$$x^2 + y^2 - 2h_1x - 2k_1y + h_1^2 + k_1^2 - r_1^2 = 0 \quad [6.12.]$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad [6.13.]$$

$$x^2 + y^2 - 34.76x - 65.82y + 514.88 = 0 \quad [6.14.]$$

Recta de intersección entre las circunferencias C1 y C2 (eje radical):

$$2(h_2 - h_1)x + 2(k_2 - k_1)y + h_1^2 + k_1^2 - h_2^2 - k_2^2 + r_2^2 - r_1^2 = 0 \quad [6.15.]$$

$$ax + by + c = 0 \quad [6.16.]$$

$$-34.76x + 66.18y - 1931.43 = 0 \quad [6.17.]$$

Se despeja la variable  $y$  de la ecuación de la recta correspondiente al eje radical:

$$y = \frac{-x - c}{b} \quad [6.18.]$$

Reemplazando en la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + \left(\frac{-x - c}{b}\right)^2 + Dx + E\left(\frac{-x - c}{b}\right) + F = 0 \quad [6.19.]$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)x^2 + \left(\frac{2ac}{b^2} + D - \frac{Ea}{b}\right)x + \left(\frac{c^2}{b^2} - \frac{Ec}{b} + F\right) = 0 \quad [6.20.]$$

Finalmente, se encuentran las raíces de la ecuación cuadrática.

Resolviendo, se llega a los siguientes dos resultados para  $I_1(x_1, y_1)$  e  $I_2(x_2, y_2)$ :

$$I_1(40.93, 50.68) ; I_2(-10.62, 23.61)$$

Se verifica cuál de ellos se encuentra a una distancia  $r_3$  desde  $C_3(h_3, k_3)$ :

$$d_{I_1C_3} = \sqrt{(x_1 - h_3)^2 + (y_1 - k_3)^2} ; d_1 = 65,14 \text{ km} \quad [6.21.]$$

$$d_{I_2C_3} = \sqrt{(x_2 - h_3)^2 + (y_2 - k_3)^2} ; d_2 = 25,89 \text{ km} \quad [6.22.]$$

Luego  $d_{I_1C_3} = r_3$

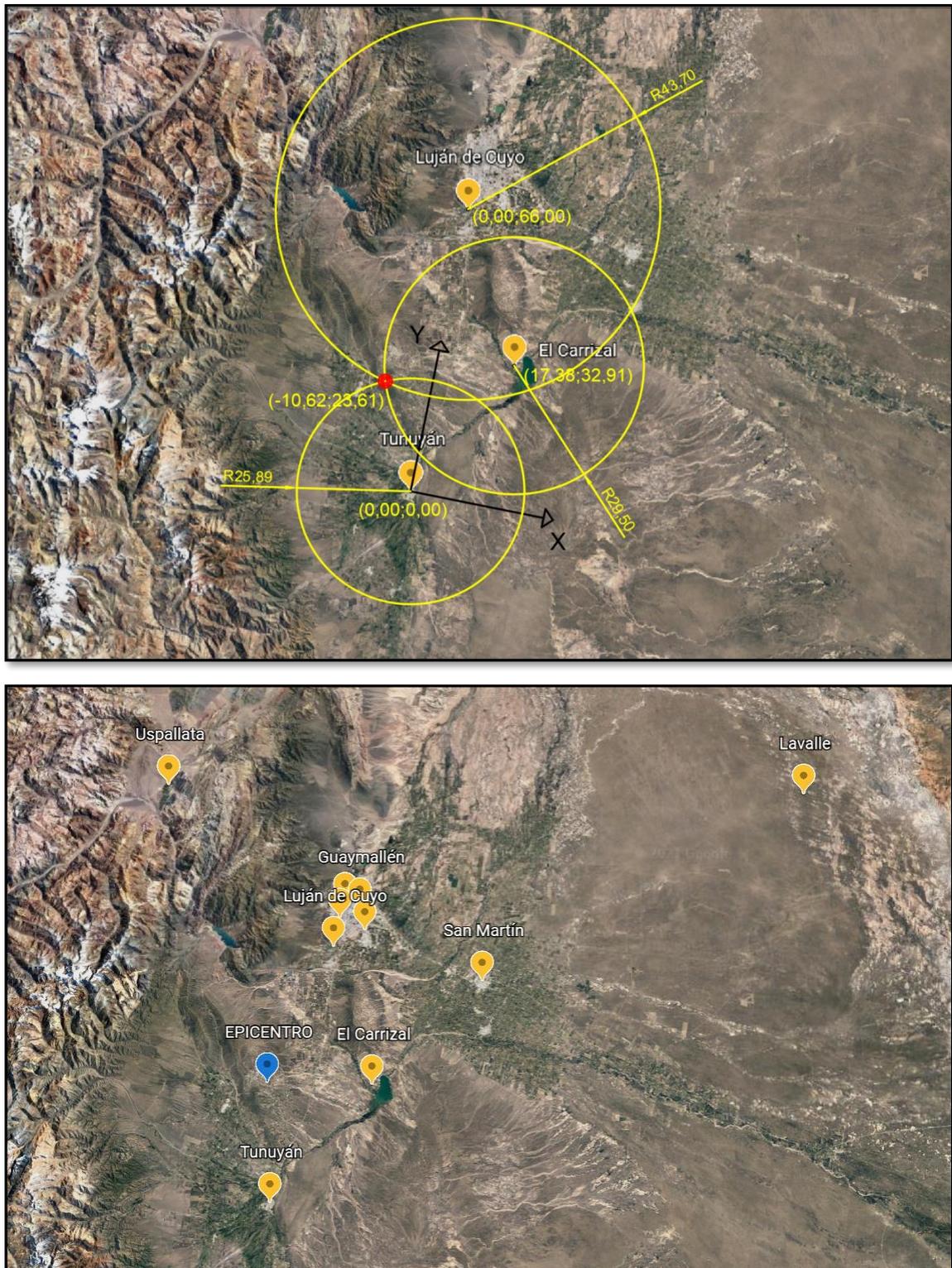
Finalmente, las coordenadas del epicentro resultan:

$$h_e = -10,62$$

$$k_e = 23,61$$

$$E(h_e, k_e) = (-10.62, 23.61)$$

Verificamos gráficamente los valores determinados.



**Figura. [6.4].** Localización del epicentro del sismo.

**6.c.** Determine la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección entre la circunferencia asociada a las estaciones de El Carrizal y Luján de Cuyo. Indique si la circunferencia de la estación Tunuyán pertenece o no a dicha familia.

*Respuestas a verificar por el estudiante:*

Ecuación de la familia de circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 34,76x - 65,82y + 514,88 + \lambda(x^2 + y^2 - 132,00y + 2446,31) = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La circunferencia de la estación Tunuyán no pertenece a dicha familia.

### **Desafío:**

**6.d.** Realice nuevamente el procedimiento adoptando un par de circunferencias diferentes a las del inciso 6.b. ( $C_1$  y  $C_3$  o bien  $C_2$  y  $C_3$ ) y verifique si llega al mismo resultado.

*Respuestas a verificar por el estudiante:*

El resultado que se obtiene para las coordenadas del epicentro es el mismo, independientemente del par de circunferencias que se utilice inicialmente.

*Nota:* Todas las imágenes han sido tomadas de Google Earth y Google Maps.

# CAPÍTULO 3

## PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES

### 3.1.

#### Problema 7. Paraboloides hiperbólicos como superficies regladas.

El paraboloides hiperbólico es una superficie reglada que tiene numerosas aplicaciones en Ingeniería y Arquitectura. Es de interés conocer las ecuaciones de las familias de rectas generatrices de esta superficie cuádrica.

**Área Temática:** Ingeniería. Arquitectura. Diseño.

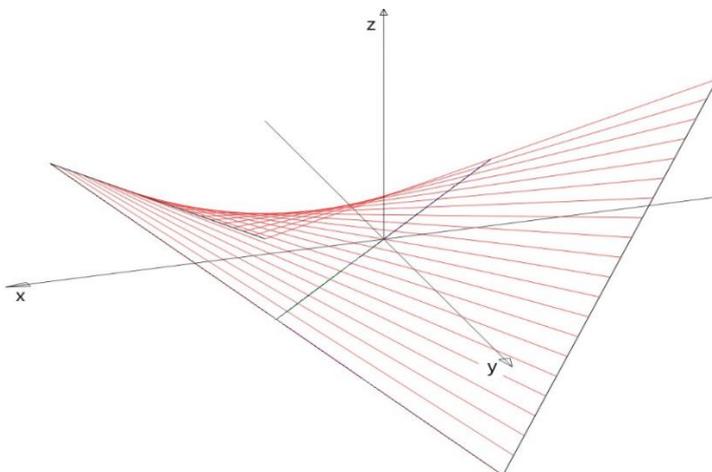
**Nivel:** AVANZADO

#### Descripción del problema.

El paraboloides hiperbólico es una superficie cuádrica sin centro, es decir, tiene dos planos de simetría, un eje de simetría y no posee centro de simetría. La ecuación de un paraboloides hiperbólico en su posición estándar o canónica, con  $a$  y  $b$  positivos, está dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \quad [7.1.]$$

La Figura [7.1] muestra un paraboloides hiperbólico en el que se han indicado algunas de las rectas generatrices.



**Figura. [7.1].**  
Paraboloides hiperbólico y rectas generatrices

**7.a.** Determine las ecuaciones de la familia de rectas que generan un paraboloides hiperbólico.

### Desarrollo de la solución.

#### Determinación de la traza en el plano $xy$ .

Comenzaremos determinando la traza de la superficie cuádrica en el plano  $xy$ . Es decir, planteamos y resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \\ z = 0 \end{cases} \quad [7.2.1.]$$

Obtenemos un par de rectas dadas por:

$$L_1: \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ z = 0 \end{cases} ; \quad L_2: \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ z = 0 \end{cases} \quad [7.2.2.]$$

Cuyas ecuaciones vectoriales paramétricas son:

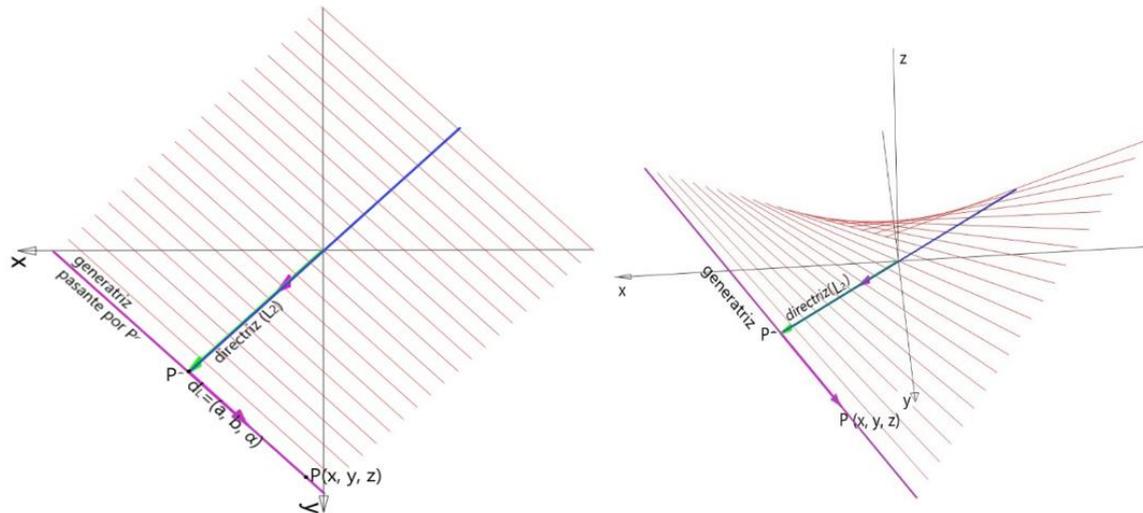
$$L_1: (x, y, z) = (0, 0, 0) + l(a, b, 0) \quad ; \quad l \in R \quad [7.3.]$$

$$L_2: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(-a, b, 0) \quad ; \quad k \in R \quad [7.4.]$$

#### Determinación de la familia de rectas alabeadas.

Consideramos que hay dos familias de rectas alabeadas. Cada una de las rectas,  $L_1$  y  $L_2$ , pertenecen respectivamente a una de dichas familias. Las rectas de una de las familias intersecan a las rectas de la otra familia. Haciendo una analogía con los conceptos usados en la generación de superficies cilíndricas y superficies cónicas, trabajaremos con  $L_1$  como una recta *generatriz* de la familia de generatrices de la superficie, y consideraremos a  $L_2$  como *directriz* (ver Figura [7.2]). Cabe señalar que los puntos de ambas rectas  $L_1$  y  $L_2$ , son puntos que pertenecen a la superficie, dado que ambas constituyen la traza de la superficie en el plano  $xy$ .

Una de las rectas generatrices es la recta  $L_1$  de la traza en el plano  $xy$ , cuyo vector director está dado por  $\mathbf{d}_{L_1} = (a, b, 0)$ . Las restantes rectas de la familia de generatrices, tienen vectores directores de la forma  $\mathbf{d}_L = (a, b, \alpha)$ , donde  $\alpha$  es un parámetro que pertenece al conjunto de números reales  $R$ . Esto es así, ya que los vectores proyección de los vectores directores de las rectas generatrices en el plano  $xy$  son vectores paralelos a  $\mathbf{d}_{L_1}$  (ver Figura [7.2]).



**Figura. [7.2].** Recta directriz y rectas generatrices del paraboloido hiperbólico.

Sea  $P'(x', y', z')$  un punto de la intersección de la directriz  $L_2$  y una generatriz perteneciente a la familia de rectas generatrices (ver Figura [7.2]). Cada generatriz  $L$  tiene por ecuación:

$$L: (x, y, z) = (x', y', z') + t (a, b, \alpha) \quad ; \quad t \in R \quad [7.5.]$$

$P'(x', y', z')$  pertenece a la directriz  $L_2$ , por lo tanto, a partir de [7.4.] se tiene que:

$$L_2: (x', y', z') = (0, 0, 0) + k' (-a, b, 0) \quad ; \quad k' \in R \quad [7.6.]$$

De donde se obtiene:

$$z' = 0; \quad x' = -k'a; \quad y' = k'b \quad [7.7.1.]$$

Sustituimos [7.7.1.] en la ecuación [7.5.] de las rectas generatrices  $L$ :

$$L: (x, y, z) = (-k'a, k'b, 0) + t (a, b, \alpha) \quad [7.7.2.]$$

Donde  $k'$ ,  $t$  y  $\alpha$  pertenecen a  $R$ .

A partir de la ecuación [7.7.2.], las ecuaciones cartesianas paramétricas de las rectas generatrices resultan:

$$\begin{cases} x = -k'a + t.a & [7.8.1.] \\ y = k'b + t.b & [7.8.2.] \\ z = 0 + t.\alpha & [7.8.3.] \end{cases}$$

Cabe observar que para cada valor de  $k'$ , tenemos una recta de la familia de rectas generatrices que pasa por el punto genérico  $P'$ .

El valor del parámetro  $\alpha$ , tercera componente del vector director de las rectas generatrices, depende del punto  $P'$  que se considere. En el caso particular que  $k'$

sea nulo, en [7.7.1.] vemos que  $P'$  coincide con el origen de coordenadas. Por lo tanto,  $L$  debe coincidir con la recta  $L_l$  de ecuación [7.3.], de donde se observa que en este caso  $\alpha$  debe ser nulo.

Para evaluar qué relación tiene el parámetro  $\alpha$  que define la inclinación de las rectas generatrices (ver Figura [7.3]), con los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  que intervienen en la ecuación de la superficie, reemplazamos las ecuaciones [7.8] en la ecuación del paraboloides hiperbólico y desarrollamos, obteniendo paso a paso:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \quad [7.9.]$$

$$\frac{(k'(-a) + ta)^2}{a^2} - \frac{(k'b + tb)^2}{b^2} = c(t\alpha) \quad [7.10.]$$

$$\frac{a^2(-k' + t)^2}{a^2} - \frac{b^2(k' + t)^2}{b^2} = c(t\alpha) \quad [7.11.]$$

$$\frac{a^2}{a^2}(-k' + t)^2 - \frac{b^2}{b^2}(k' + t)^2 = c(t\alpha) \quad [7.12.]$$

$$(-k' + t)^2 - (k' + t)^2 = c(t\alpha) \quad [7.13.]$$

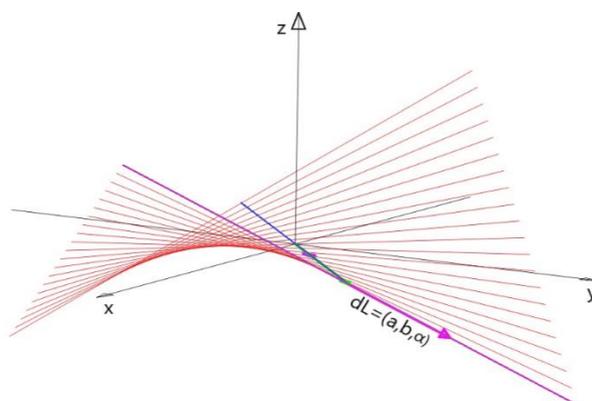
$$(k'^2 - 2k't + t^2) - (k'^2 + 2k't + t^2) = c(t\alpha) \quad [7.14.]$$

$$-4k't = c\alpha \quad [7.15.]$$

$$\frac{-4k'}{c} = \alpha \quad [7.16.]$$

Esta última expresión indica que los vectores directores de las rectas generatrices van a ir variando su tercera componente  $\alpha$  de manera proporcional a  $k'$ , es decir al parámetro asociado al punto  $P'$ .

**Figura. [7.3].** Rectas generatrices del paraboloides hiperbólico



Para demostrar que la familia de rectas dada por [7.7.2] constituye un paraboloides hiperbólico, debemos trabajar algebraicamente y eliminar todos los parámetros. El

objetivo es obtener una expresión en términos de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y de los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  (sin los parámetros  $k'$ ,  $t$  y  $\alpha$ ), y comprobar que efectivamente corresponde a un paraboloides hiperbólico.

A partir de las ecuaciones [7.8.1] y [7.8.2] despejamos el parámetro  $k'$  e igualamos:

De [7.8.1] obtenemos:

$$k' = \frac{x - t \cdot a}{-a} \quad [7.17.]$$

De [7.8.2] surge:

$$k' = \frac{y - t \cdot b}{b} \quad [7.18.]$$

Iguando ambas expresiones, [7.17.] y [7.18.], resulta:

$$\frac{x - t \cdot a}{-a} = \frac{y - t \cdot b}{b} \quad [7.19.]$$

$$xb - tab = -ya + tab \quad [7.20.]$$

$$xb + ya = tab + tab \quad [7.21.]$$

$$\frac{xb + ya}{2ab} = t \quad [7.22.]$$

A partir de las ecuaciones [7.8.1] y [7.8.2], despejamos a continuación el parámetro  $t$  e igualamos:

De [7.8.1]:

$$t = \frac{x + k'a}{a} \quad [7.23.]$$

De [7.8.2]:

$$t = \frac{y - k'b}{b} \quad [7.24.]$$

Iguando ambas expresiones, [7.23.] y [7.24.], se obtiene:

$$\frac{x + k'a}{a} = \frac{y - k'b}{b} \quad [7.25.]$$

$$xb + k'ab = ya - k'ab \quad [7.26.]$$

$$xb - ya = -k'ab - k'ab \quad [7.27.]$$

$$\frac{-xb + ya}{2ab} = k' \quad [7.28.]$$

Reemplazamos los parámetros  $k'$  y  $t$  ([7.24.] y [7.28.]), en la ecuación [7.8.3.]:

$$z = \frac{xb + ya}{2ab} \alpha \quad [7.29.]$$

Luego sustituimos  $\alpha$  dado por la expresión [7.16], en la ecuación anterior [7.29.]:

$$z = \left( \frac{xb + ya}{2ab} \right) \left( \frac{-4k'}{c} \right) \quad [7.30.]$$

A continuación, reemplazamos  $k'$  dado por la ecuación [7.28.] en la ecuación [7.30] y desarrollamos. El procedimiento paso a paso es el siguiente:

$$z = \left( \frac{xb + ya}{2ab} \right) \left( \frac{-4}{c} \left( \frac{-xb + ya}{2ab} \right) \right) \quad [7.31.]$$

$$cz = -4 \left( \frac{xb + ya}{2ab} \right) \left( \frac{-xb + ya}{2ab} \right) \quad [7.32.]$$

$$cz = -4 \frac{(xb + ya)(-xb + ya)}{4(ab)^2} \quad [7.33.]$$

$$cz = -4 \frac{-(xb)^2 + (ya)^2}{4(ab)^2} \quad [7.34.]$$

$$cz = \frac{4(xb)^2}{4(ab)^2} - \frac{4(ya)^2}{4(ab)^2} \quad [7.35.]$$

$$cz = \frac{x^2 b^2}{a^2 b^2} - \frac{y^2 a^2}{a^2 b^2} \quad [7.36.]$$

$$cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad [7.37.]$$

La ecuación [7.37.] corresponde a la ecuación inicial del paraboloides hiperbólico. De este modo queda demostrado que el paraboloides hiperbólico es una superficie reglada, que puede ser generada por la siguiente familia de rectas:

$$\begin{cases} x = -k' a + t. a \\ y = k' . b + t. b \\ z = 0 + t \frac{-4k'}{c} \end{cases} \quad [7.38.]$$

Para cada valor de  $k'$ , las ecuaciones [7.38.] corresponden a una recta que pasa por el punto  $P'$ , con  $k'$  y  $t$  que pertenecen a los números reales. Se observa que  $k'$  interviene tanto en las coordenadas de un punto de cada recta generatriz, como en la tercera componente del vector director, modificando de este modo la inclinación de dicha recta.

### Desafío:

**7.b.** Realice el mismo trabajo para demostrar que el hiperboloides de una hoja de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  es también una superficie reglada.

## 3.2.

### Problema 8. Iluminación natural de un estadio polideportivo cubierto.

El estudio de las condiciones de iluminación natural en espacios cerrados a través de la determinación de aberturas constituye un aspecto de interés en Arquitectura e Ingeniería.

**Área Temática:** Ingeniería. Arquitectura. Diseño.

**Nivel:** AVANZADO 

#### Descripción del problema.

Se desean estudiar las condiciones de iluminación natural dentro de un espacio cerrado correspondiente a un estadio deportivo de usos múltiples.

El estadio posee una cubierta cilíndrica constituida por arcos parabólicos. Su altura máxima es de 30m y cubre en planta una superficie rectangular de 80m de ancho por 100m en la dirección longitudinal. Los arcos se encuentran ubicados sobre planos paralelos al lado menor de la superficie rectangular cubierta.

**8.a.** Defina un sistema de referencia tal que el origen de coordenadas se ubique en el centro de la superficie rectangular, el eje  $x$  sea paralelo a su lado mayor, el eje  $y$  sea paralelo a su lado menor y el eje  $z$  permita medir las alturas. Obtenga la ecuación de la cubierta del estadio y represente gráficamente.

#### Desarrollo de la solución.

Con el objeto de obtener la ecuación de la superficie cilíndrica que constituye la cubierta del estadio, hallamos en primer lugar la traza de dicha superficie en el plano  $y$ - $z$ . Se trata de una parábola con vértice en el punto  $V(0,0,30)$ , está dada por la ecuación [8.1.] y es la directriz de la superficie buscada.

$$y^2 = 2p(z - 30) \quad [8.1.]$$

El punto  $Q(0, 40, 0)$  pertenece a la traza, por lo cual, reemplazando sus coordenadas en la ecuación [8.1.] se obtienen las expresiones que permiten encontrar el parámetro de la parábola.

$$40^2 = 2p(0 - 30) \quad [8.2.]$$

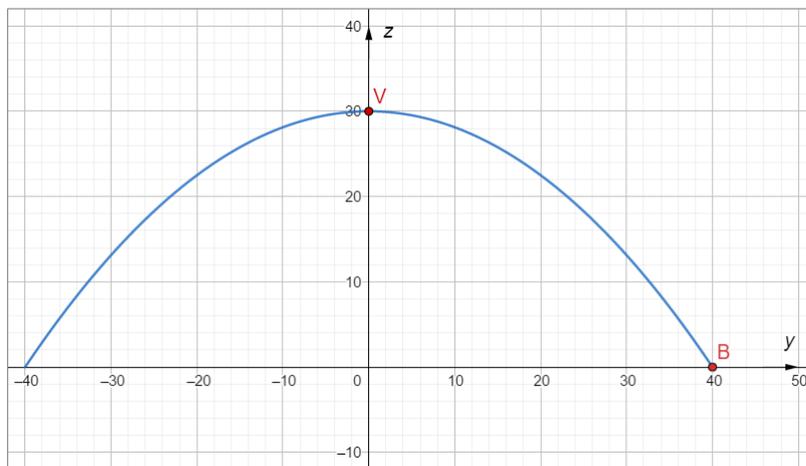
$$2p = -\frac{1600}{30} = -\frac{160}{3} \quad [8.3.]$$

$$p = -\frac{80}{3} \quad [8.4.]$$

De esta manera, la traza de la superficie cilíndrica en el plano  $y$ - $z$  queda determinada por la ecuación [8.5].

$$\begin{cases} y^2 = -\frac{160}{3}(z - 30) \\ x = 0 \end{cases} \quad [8.5.]$$

La Figura [8.1] permite observar la representación gráfica de dicha traza.

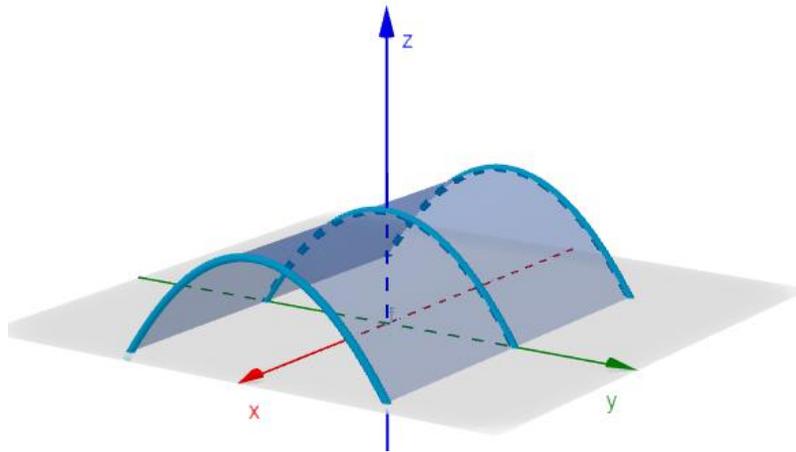


**Figura. [8.1].** Taza de la superficie cilíndrica en el plano  $y$ - $z$

Teniendo en cuenta que la generatriz de la superficie cilíndrica es paralela al vector  $\mathbf{v}=(1, 0,0)$ , una vez conocida la ecuación del arco parabólico en el plano  $y$ - $z$ , estamos en condiciones de obtener una expresión analítica para la superficie cilíndrica buscada:

$$\begin{cases} y^2 = -\frac{160}{3}(z - 30) \\ -50 \leq x \leq 50 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad [8.6.]$$

La representación gráfica de la misma se puede observar en la Figura [8.2], donde se aprecia la volumetría general del estadio.



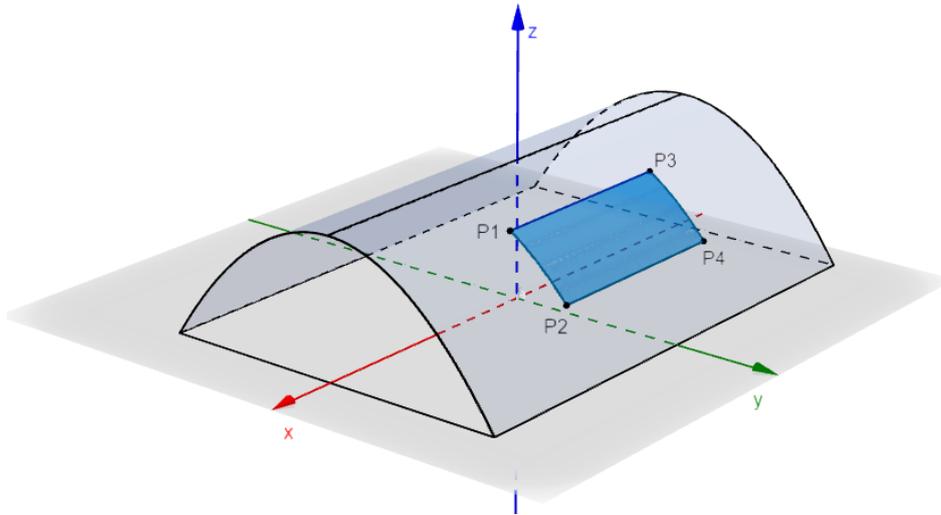
**Figura. [8.2].** Perspectiva del estadio polideportivo estudiado

**8.b.** La cubierta del estadio posee un tragaluz que se desarrolla desde una altura de 13m hasta una altura de 25m, con una dimensión de 40m en la dirección paralela al eje  $x$ . El mismo está centrado longitudinalmente y se encuentra sobre el semieje positivo  $y$ . Describa analíticamente la superficie comprendida por el tragaluz y represente gráficamente. Obtenga el área de desarrollo del mismo.

El tragaluz forma parte de la cubierta parabólica, por lo cual su ecuación es coincidente con la misma, con diferentes intervalos de variación de las variables que la definen. En virtud de que la longitud del mismo es de 40m, la variable  $x$  toma valores desde -20m a 20m. A partir de los reemplazos correspondientes en la ecuación [8.6.], es posible obtener que para una altura  $z_1=13\text{m}$  corresponde  $y_1=16.3\text{m}$  y para  $z_2=25\text{m}$  corresponde  $y_2=30.1\text{m}$ . De esta manera tendremos:

$$\begin{cases} y^2 = -\frac{160}{3}(z - 30) \\ -20 \leq x \leq 20 \\ 13 \leq z \leq 25 \end{cases} \quad [8.7.]$$

La Figura [8.3], permite observar la representación gráfica del problema, donde se destaca el tragaluz y sus vértices.



**Figura. [8.3].** Detalle del tragaluz y sus puntos vértice.

El área desarrollada por el tragaluz puede evaluarse a partir de la expresión  $A=ab$ ; siendo  $A$ , el área buscada;  $a$ , la longitud del arco parabólico P1-P2 o P3-P4 y  $b$ , la longitud del tragaluz. De esta manera, reordenando la ecuación [8.6.], derivando y luego integrando entre los extremos dados por los puntos P1 y P2, tendremos la longitud del arco  $a$ .

$$z(y) = -\frac{3}{160}y^2 + 30 \quad [8.8.]$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{3y}{80} \quad [8.9.]$$

$$a = \int_{16.3}^{30.1} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dy = \int_{16.3}^{30.1} \sqrt{1 + \left(\frac{3y}{80}\right)^2} dy \quad [8.10.]$$

Realizando cambio de variable, actualizando los extremos de integración y sustituyendo obtenemos:

$$u = \frac{3y}{80} \Rightarrow du = \frac{3}{80} dy \quad [8.11.]$$

$$u(30.1) \approx 1.13 \quad [8.12.]$$

$$u(16.3) \approx 0.61 \quad [8.13.]$$

$$a = \frac{80}{3} \int_{0.61}^{1.13} \sqrt{1 + u^2} du = \frac{80}{3} \left[ \frac{1}{2} u \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1 + u^2} + u \right| \right]_{0.61}^{1.13} \quad [8.14.]$$

$$a \approx 18.4m$$

Por lo tanto, el área aproximada es:

$$A = ab \cong (18.4m)(40m) \cong 736m^2 \quad [8.15.]$$

**8.c.** Se desea estudiar las condiciones de iluminación natural dentro del recinto. Para ello se necesita conocer la superficie en el piso que recibe rayos solares a través del tragaluz, en las horas de mayor radiación en invierno y en verano. Los rayos solares inciden con una dirección  $\mathbf{d}_L=(1, 1, 1)$  en invierno y perpendiculares al piso en verano. Para cada estación, indique las ecuaciones de los bordes de la zona iluminada. Represente gráficamente.

De acuerdo a lo explicado anteriormente, los puntos que definen los vértices del tragaluz son P1, P2, P3 y P4. En verano, teniendo en cuenta la dirección de los rayos solares indicada, se obtienen las proyecciones ortogonales de dichos puntos sobre el piso del estadio o, según el sistema de referencia, el plano  $xy$ . La geometría de dichos puntos se indica en la Tabla [8.1].

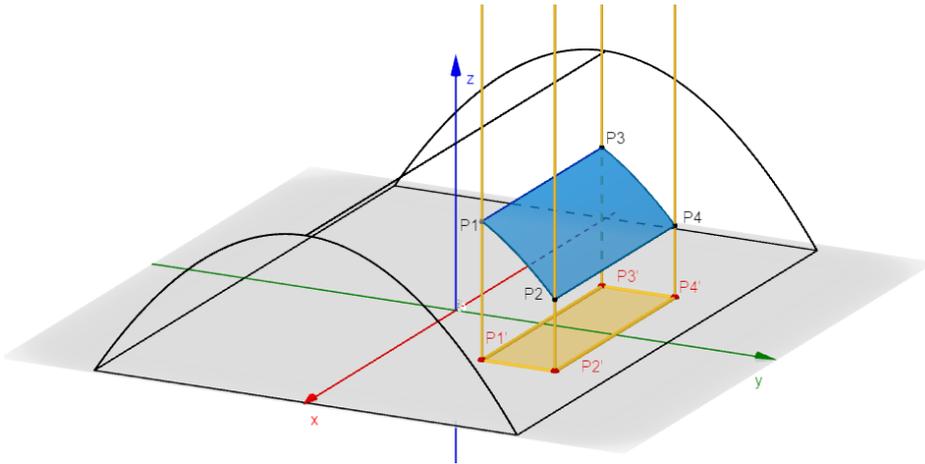
Condición de estudio: <b>Verano</b>							
Vértices del tragaluz				Proyección ortogonal sobre el plano $xy$			
Punto	$x[m]$	$y[m]$	$z[m]$	Punto	$x[m]$	$y[m]$	$z[m]$
P1	20.0	16.3	25.0	P1'	20.0	16.3	0.0
P2	20.0	30.1	13.0	P2'	20.0	30.1	0.0
P3	-20.0	16.3	25.0	P3'	-20.0	16.3	0.0
P4	-20.0	30.1	13.0	P4'	-20.0	30.1	0.0

**Tabla. [8.1].**  
Coordenadas de los puntos obtenidos a partir de la proyección ortogonal de los vértices del tragaluz en verano.

De esta manera, la zona iluminada sobre el piso del estadio se encuentra delimitada por los siguientes bordes:

$$\begin{aligned}
 b1: \begin{cases} y = 30.1 \\ -20 \leq x \leq 20 \end{cases} & \quad b2: \begin{cases} y = 16.3 \\ -20 \leq x \leq 20 \end{cases} \\
 b3: \begin{cases} x = -20 \\ 16.3 \leq y \leq 30.1 \end{cases} & \quad b4: \begin{cases} x = 20 \\ 16.3 \leq y \leq 30.1 \end{cases}
 \end{aligned} \quad [8.16.]$$

La siguiente figura muestra detalles de la zona iluminada sobre el piso del estadio.



**Figura. [8.4].**  
Condición de iluminación sobre el piso del estadio en verano.

En el caso del invierno, la proyección de los haces de luz describe una superficie cilíndrica cuyas rectas generatrices tienen a  $\mathbf{d}_L=(1,1,1)$  como vector director y a cada uno de los bordes del tragaluz como directriz.

Siendo el borde superior  $D_1$ , borde inferior  $D_2$ , borde lateral izquierdo  $D_3$  y borde lateral derecho  $D_4$ , las expresiones que los definen son las siguientes:

$$D_1: \begin{cases} y = 16.3 \\ z = 25 \\ -20 \leq x \leq 20 \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} y = 30.11 \\ z = 13 \\ -20 \leq x \leq 20 \end{cases} \quad [8.17.]$$

$$D_3: \begin{cases} y^2 = -\frac{160}{3}(z - 30) \\ x = 20 \\ 16.3 \leq y \leq 30.11 \end{cases} \quad D_4: \begin{cases} y^2 = -\frac{160}{3}(z - 30) \\ x = -20 \\ 16.3 \leq y \leq 30.11 \end{cases} \quad [8.18.]$$

Es posible definir la superficie descrita por los haces de luz a partir de cuatro ecuaciones de superficies cilíndricas ( $A_1, A_2, A_3$  y  $A_4$ ), una con cada directriz. Éstas se obtienen mediante el procedimiento estudiado para superficies cilíndricas:

### Superficie $A_1$ :

Sea  $P'$  un punto perteneciente a la generatriz y a la directriz  $D_1$

$$P' \in D_1: \begin{cases} y' = 16.3 \\ z' = 25 \\ -20 \leq x' \leq 20 \end{cases} \quad [8.19.]$$

La ecuación de la generatriz está dada por:

$$\frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{1} = \frac{z - z'}{1} \quad [8.20.]$$

Entonces:

$$x - x' = y - 16.3 = z - 25 \Rightarrow \begin{cases} x - x' = y - 16.3 \\ x - x' = z - 25 \end{cases} \quad [8.21.]$$

Igualando ambas expresiones obtenemos:

$$y - 16.3 = z - 25 \Rightarrow y - z + 8.7 = 0 \quad [8.22.]$$

Además, para la variable  $x'$ :

$$\begin{aligned} x' = x - z + 25 &\Rightarrow -20 \leq x - z + 25 \leq 20 \\ &\Rightarrow -45 \leq x - z \leq -5 \end{aligned} \quad [8.23.]$$

Luego:

$$A_1: \begin{cases} y - z + 8.7 = 0 \\ -45 \leq x - z \leq -5 \end{cases} \quad [8.24.]$$

La intersección con el plano  $xy$  será:

$$A'_1: \begin{cases} y = -8.7 \\ -45 \leq x \leq -5 \end{cases} \quad [8.25.]$$

### Superficie A2:

Sea  $P'$  un punto perteneciente a la generatriz y a la directriz  $D_2$

$$P' \in D_2: \begin{cases} y' = 30.11 \\ z' = 13 \\ -20 \leq x' \leq 20 \end{cases} \quad [8.26.]$$

La ecuación de la generatriz está dada por:

$$\frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{1} = \frac{z - z'}{1} \quad [8.27.]$$

Entonces:

$$x - x' = y - 30.11 = z - 13 \Rightarrow \begin{cases} x - x' = y - 30.11 \\ x - x' = z - 13 \end{cases} \quad [8.28.]$$

Igualando ambas expresiones obtenemos:

$$\begin{aligned} y - 30.11 &= z - 13 \\ &\Rightarrow y - z + 17.11 = 0 \end{aligned} \quad [8.29.]$$

Además, para la variable  $x'$ :

$$x' = x - z + 13 \Rightarrow -20 \leq x - z + 13 \leq 20 \quad [8.30.1.]$$

$$\Rightarrow -33 \leq x - z \leq 7 \quad [8.30.2.]$$

Luego:

$$A_2: \begin{cases} y - z - 17.11 = 0 \\ -33 \leq x - z \leq 7 \end{cases} \quad [8.30.3.]$$

La intersección con el plano  $xy$  será:

$$A'_2: \begin{cases} y = 17.11 \\ -33 \leq x \leq 7 \end{cases} \quad [8.30.4.]$$

### Superficie $A_3$ :

Sea  $P'$  un punto perteneciente a la generatriz y a la directriz  $D_3$

$$P' \in D_3: \begin{cases} y'^2 = -\frac{160}{3}(z' - 30) \\ x' = 20 \\ 16.3 \leq y' \leq 30.11 \end{cases} \quad [8.31.]$$

La ecuación de la generatriz está dada por:

$$\frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{1} = \frac{z - z'}{1} \quad [8.32.]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x - 20 &= y - y' = z - z' \\ \Rightarrow \begin{cases} y' = y - x + 20 \\ z' = z - x + 20 \end{cases} \end{aligned} \quad [8.33.]$$

Luego:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (y - x + 20)^2 = -\frac{160}{3}(z - x + 20 - 30) \\ 16.3 \leq y - x + 20 \leq 30.11 \end{cases} \\ \Rightarrow A_3: \begin{cases} (y - x + 20)^2 = -\frac{160}{3}(z - x - 10) \\ -3.7 \leq y - x \leq 10.11 \end{cases} \end{aligned} \quad [8.34.]$$

La intersección con el plano  $xy$  será:

$$\begin{cases} (y - x + 20)^2 = -\frac{160}{3}(-x - 10) \\ -3.7 + x \leq y \leq 10.11 + x \end{cases} \quad [8.35.]$$

Para  $x = y + 3.7 \Rightarrow y = -8.7$

Para  $x = y - 10.11 \Rightarrow y = 17.11$

$$A'_3: \begin{cases} (y - x + 20)^2 = -\frac{160}{3}(-x - 10) \\ -8.7 \leq y \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.36.]$$

Se trata de una parábola rototrasladada respecto del sistema original.

### Superficie A4:

Sea P' un punto perteneciente a la generatriz y a la directriz D<sub>4</sub>

$$P' \in D_4: \begin{cases} y'^2 = -\frac{160}{3}(z' - 30) \\ x' = -20 \\ 16.3 \leq y' \leq 30.11 \end{cases} \quad [8.37.]$$

La ecuación de la generatriz está dada por:

$$\frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{1} = \frac{z - z'}{1} \quad [8.38.]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x + 20 &= y - y' = z - z' \\ \Rightarrow \begin{cases} y' = y - x - 20 \\ z' = z - x - 20 \end{cases} \end{aligned} \quad [8.39.]$$

Luego:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (y - x - 20)^2 = -\frac{160}{3}(z - x - 20 - 30) \\ 16.3 \leq y - x - 20 \leq 30.11 \end{cases} \\ \Rightarrow A_4: \begin{cases} (y - x - 20)^2 = -\frac{160}{3}(z - x - 50) \\ 36.3 \leq y - x \leq 50.11 \end{cases} \end{aligned} \quad [8.40.]$$

La intersección con el plano  $xy$ :

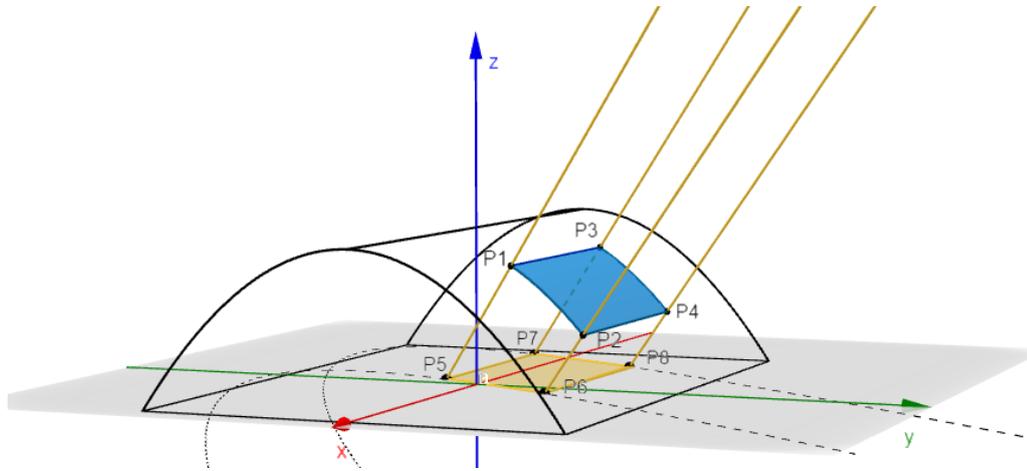
$$\begin{cases} (y - x - 20)^2 = -\frac{160}{3}(-x - 50) \\ 36.3 \leq y - x \leq 50.11 \end{cases} \quad [8.41.]$$

Para  $x = y - 36.3 \Rightarrow y = -8.7$

Para  $x = y - 50.11 \Rightarrow y = 17.11$

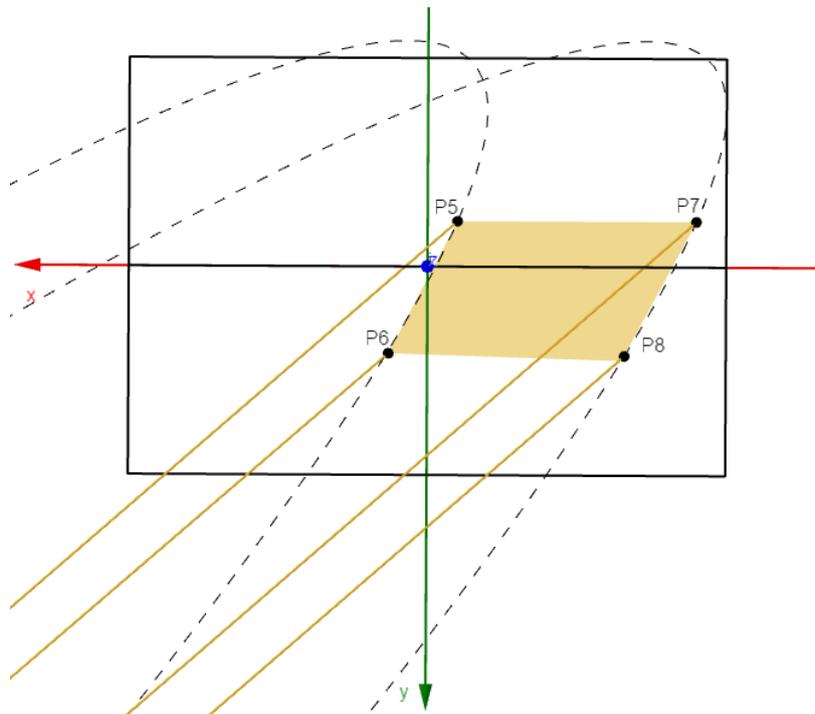
$$A'_4: \begin{cases} (y - x - 20)^2 = -\frac{160}{3}(-x - 50) \\ -8.7 \leq y \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.42.]$$

De esta manera, la zona iluminada sobre el plano  $xy$  en invierno se puede observar en la Figura [8.5].



**Figura. [8.5].**  
Condición de iluminación sobre el piso del estadio en invierno.

Un detalle de los puntos calculados y las parábolas halladas se puede observar en verdadera magnitud sobre el plano  $xy$  en la Figura [8.6].



**Figura. [8.6].**  
Detalle en planta de la superficie iluminada en invierno.

**8.d.** Encuentre un nuevo sistema de referencia  $x'y'$  para los cuales las parábolas del inciso anterior no se encuentren rotadas. Obtenga la ecuación de las mismas respecto al nuevo sistema de referencia hallado.

Escribimos las expresiones de las parábolas  $A'_3$  y  $A'_4$  llevando las respectivas

ecuaciones de segundo grado a su forma general:

$$A'_3: \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - \frac{280}{3}x + 40y - \frac{400}{3} = 0 \\ -8.7 \leq y \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.43.]$$

$$A'_4: \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - \frac{40}{3}x - 40y - \frac{6800}{3} = 0 \\ -8.7 \leq y \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.44.]$$

Ambas ecuaciones de segundo grado tienen la misma forma cuadrática asociada:

$$x^2 - 2xy + y^2$$

Llevando las expresiones a la forma matricial, obtenemos:

$$A'_3: \begin{cases} \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{K}_3 \mathbf{X} - \frac{400}{3} = 0 \\ -8.7 \leq [0 \quad 1] \mathbf{X} \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.45.]$$

$$A'_4: \begin{cases} \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{K}_4 \mathbf{X} - \frac{6800}{3} = 0 \\ -8.7 \leq [0 \quad 1] \mathbf{X} \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.46.]$$

Donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad [8.47.]$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{280}{3} & 40 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{40}{3} & -40 \end{bmatrix} \quad [8.48.]$$

Obtenemos los *autovalores* y *autovectores* de la matriz  $\mathbf{A}$ , para formar la matriz ortogonal  $\mathbf{P}$  que diagonaliza a  $\mathbf{A}$ . Verificamos que el determinante de  $\mathbf{P}$  sea igual a 1.

$$\lambda_1 = 2 \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad [8.49.]$$

$$\lambda_2 = 0 \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad [8.50.]$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad |\mathbf{P}| = 1 \quad [8.51.]$$

Realizamos la transformación de coordenadas empleando la matriz  $\mathbf{P}$  mediante la relación  $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}'$ , donde  $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ . Entonces:

$$A'_3: (\mathbf{P}\mathbf{X}')^T \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{X}' + \mathbf{K}_3 \mathbf{P}\mathbf{X}' - \frac{400}{3} = 0 \quad [8.52.]$$

$$A'_3: \mathbf{X}'^T \mathbf{P}^T \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{X}' + \mathbf{K}_3 \mathbf{P}\mathbf{X}' - \frac{400}{3} = 0 \quad [8.53.]$$

$$A'_3: \mathbf{X}'^T \mathbf{D}\mathbf{X}' + (\mathbf{K}_3 \mathbf{P})\mathbf{X}' - \frac{400}{3} = 0 \quad [8.54.]$$

$$A'_4: (\mathbf{P}\mathbf{X}')^T \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{X}' + \mathbf{K}_4 \mathbf{P}\mathbf{X}' - \frac{6800}{3} = 0 \quad [8.55.]$$

$$A'_4: \mathbf{X}'^T \mathbf{P}^T \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{X}' + \mathbf{K}_4 \mathbf{P}\mathbf{X}' - \frac{6800}{3} = 0 \quad [8.56.]$$

$$A'_4: \mathbf{X}'^T \mathbf{D}\mathbf{X}' + (\mathbf{K}_4 \mathbf{P})\mathbf{X}' - \frac{6800}{3} = 0 \quad [8.57.]$$

Sean las matrices:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_3 \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{400}{3\sqrt{2}} & -\frac{160}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad [8.58.]$$

$$\mathbf{K}_4 \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{80}{3\sqrt{2}} & -\frac{160}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad [8.59.]$$

$$[0 \ 1]\mathbf{X} = [0 \ 1]\mathbf{P}\mathbf{X}' = [-1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]\mathbf{X}' \quad [8.60.]$$

Obtenemos entonces las ecuaciones que se buscan:

$$A'_3: \begin{cases} [x' \ y'] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{400}{3\sqrt{2}} & -\frac{160}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \frac{400}{3} = 0 \\ -8.7 \leq [-1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.61.]$$

$$A'_4: \begin{cases} [x' \ y'] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{80}{3\sqrt{2}} & -\frac{160}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \frac{6800}{3} = 0 \\ -8.7 \leq [-1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.62.]$$

$$A'_3: \begin{cases} 2x'^2 - \frac{400}{3\sqrt{2}}x' - \frac{160}{3\sqrt{2}}y' - \frac{400}{3} = 0 \\ -8.7 \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.63.]$$

$$A'_4: \begin{cases} 2x'^2 + \frac{80}{3\sqrt{2}}x' - \frac{160}{3\sqrt{2}}y' - \frac{6800}{3} = 0 \\ -8.7 \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \leq 17.11 \end{cases} \quad [8.64.]$$

**8.e.** Calcule las áreas iluminadas correspondientes al verano y en forma aproximada en invierno, asumiendo que todos los bordes de la misma son rectilíneos, utilizando producto vectorial.

**Verano:** Considerando los vectores  $\mathbf{P}'_1\mathbf{P}'_2=(0, 13.8, 0)$  y  $\mathbf{P}'_1\mathbf{P}'_3=(-40, 0, 0)$ , el área de la zona iluminada corresponde al área dada por:

$$A_V = \|\mathbf{P}'_1\mathbf{P}'_2 \times \mathbf{P}'_1\mathbf{P}'_3\| = 552m^2 \quad [8.65.]$$

**Invierno:** A los efectos de calcular en forma aproximada el área de la zona iluminada en invierno, se asume que los bordes de la misma son rectilíneos. Sean P5, P6, P7 y P8 las proyecciones sobre el plano  $xy$  de los vértices del tragaluz, en la dirección de  $\mathbf{d}_L=(1,1,1)$ . Obtenemos sus coordenadas calculando la intersección con el plano  $xy$  de cuatro rectas que tienen a  $\mathbf{d}_L$  como vector director, y que pasan por los puntos P1, P2, P3 y P4 respectivamente:

$$L1: \begin{cases} x = 20 + t_1 \\ y = 16.3 + t_1, t_1 \in R \\ z = 25 + t_1 \end{cases} \text{ para } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -25 \\ y = -8.7 \\ x = -5 \end{cases} \quad [8.66.]$$

$$L2: \begin{cases} x = 20 + t_2 \\ y = 30.1 + t_2, t_2 \in R \\ z = 13 + t_2 \end{cases} \text{ para } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_2 = -13 \\ y = 17.1 \\ x = 7 \end{cases} \quad [8.67.]$$

$$L3: \begin{cases} x = -20 + t_3 \\ y = 16.3 + t_3, t_3 \in R \\ z = 25 + t_3 \end{cases} \text{ para } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_3 = -25 \\ y = -8.7 \\ x = -45 \end{cases} \quad [8.68.]$$

$$L4: \begin{cases} x = -20 + t_4 \\ y = 30.1 + t_4, t_4 \in R \\ z = 13 + t_4 \end{cases} \text{ para } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_4 = -13 \\ y = 17.1 \\ x = -33 \end{cases} \quad [8.69.]$$

Se obtienen de esta manera las coordenadas dadas en la Tabla [8.2]:

Condición de estudio: <b>Invierno</b>							
Vértices del tragaluz				Proyección ortogonal sobre el plano $xy$			
Punto	$x[m]$	$y[m]$	$z[m]$	Punto	$x[m]$	$y[m]$	$z[m]$
P1	20.0	16.3	25.0	P5	-5.0	-8.7	0.0
P2	20.0	30.1	13.0	P6	7.0	17.1	0.0
P3	-20.0	16.3	25.0	P7	-45.0	-8.7	0.0
P4	-20.0	30.1	13.0	P8	-33.0	17.1	0.0

**Tabla. [8.2].**  
Coordenadas de los puntos obtenidos a partir de la proyección ortogonal de los vértices del tragaluz en invierno.

Podemos observar que P5, P6, P7 y P8 son los puntos de intersección entre los bordes A1', A2', A3' y A4' calculados anteriormente. Aproximamos entonces el área iluminada como el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores  $\mathbf{P}_7\mathbf{P}_8=(12, 25.7, 0)$  y  $\mathbf{P}_7\mathbf{P}_5=(40, 0, 0)$ .

$$A_I = \|\mathbf{P}_7\mathbf{P}_8 \times \mathbf{P}_7\mathbf{P}_5\| = 1028m^2 \quad [8.70.]$$

**8.f.** Con el objeto de diseñar el sistema de ventilación forzada y climatización del estadio, es necesario conocer el volumen total del recinto ocupado. Calcule dicho volumen.

El volumen del recinto está dado por  $V=Al$ , donde  $A$  es el área bajo el arco parabólico extremo de la cubierta y  $l=100m$  es la longitud de desarrollo de la cubierta en la dirección del eje  $x$ .

$$A = \int_{-40}^{40} z(y) dy \quad [8.71.]$$

$$A = \int_{-40}^{40} \left(-\frac{3}{160}y^2 + 30\right) dy = \left[-\frac{y^3}{160} + 30y\right]_{-40}^{40} = 800 - (-800) = 1600m^2 \quad [8.72.]$$

$$V = A.l = 1600m^2 \cdot 100m = 160000m^3 \quad [8.73.]$$

## 3.3.

### Problema 9. Movimientos de una grúa torre.

Las grúas torre son ampliamente utilizadas para trasladar cargas de un punto a otro, en construcciones de edificios de gran altura, instalaciones industriales, portuarias, etc. (Figura [9.1.]). Los puntos de carga y descarga, así como los movimientos y trayectorias que debe realizar la grúa, pueden describirse de manera precisa utilizando conceptos de la Geometría Analítica.

**Área Temática:** Ingeniería. Máquinas y equipos.

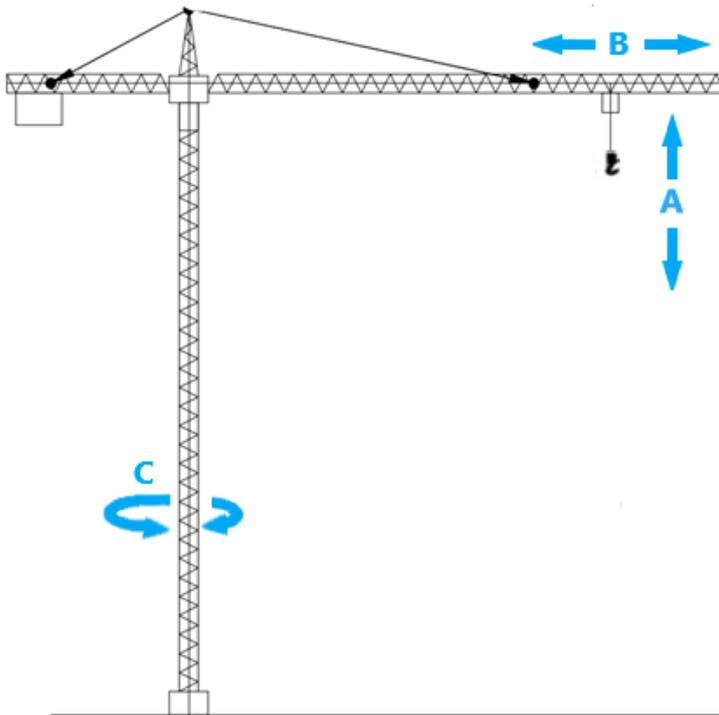
**Nivel:** INTERMEDIO 



**Figura. [9.1].** Grúa torre operando en instalaciones de Puerto Quequén, Argentina.

#### Descripción del problema.

En un puerto marítimo comercial, se cargan y descargan de los barcos las mercancías transportadas en contenedores, utilizando grúas torre. En la Figura [9.2] se muestra un esquema simple de una grúa torre y los movimientos que puede realizar el gancho que transporta las cargas.



**Figura. [9.2].**  
Esquema de una grúa torre típica. El gancho puede realizar tres tipos de movimiento.

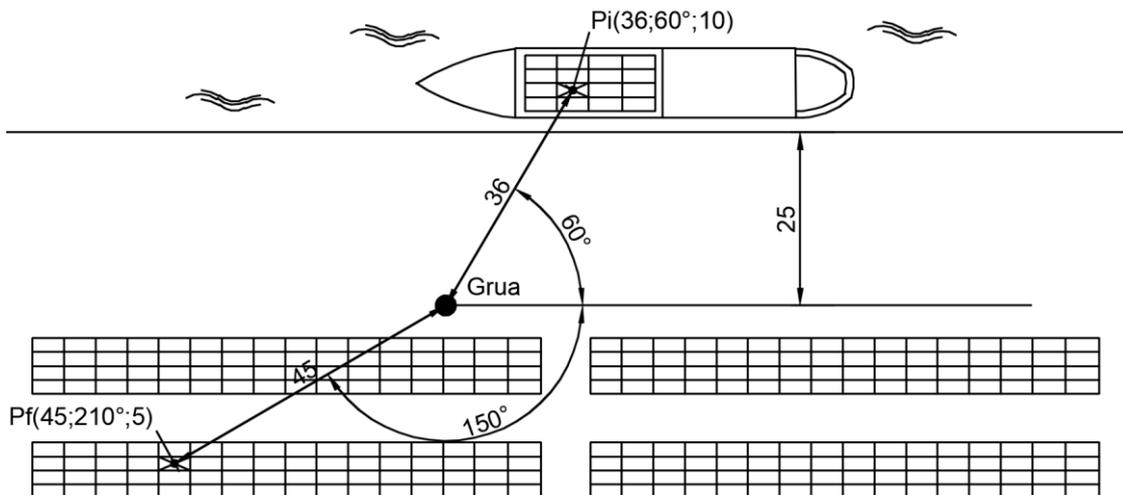
El movimiento A es realizado por el *motor de elevación*, y permite subir y bajar la carga. El *motor de distribución* realiza el movimiento B, que permite alejar y acercar la carga respecto al eje de la grúa. Por último, el *motor de orientación* realiza el movimiento C, que permite rotar la carga respecto al eje de la grúa.

Así, la posición del gancho puede expresarse en coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  o bien en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ .

Se desea trasladar un contenedor de 4500kg desde la cubierta de un barco a un playón de descarga. La cubierta del barco tiene una altura de 10 metros y el playón de 5 metros, con respecto al nivel de referencia.

### Desarrollo de la solución.

Consideramos un sistema de referencia espacial, cuyo centro de coordenadas se ubica sobre la base de la grúa torre, y el eje  $z$  sobre su columna. En la Figura [9.3] se muestra una vista en planta del movimiento de descarga a realizar. El punto  $P_i$  está sobre el barco y corresponde a la posición inicial del contenedor. El punto  $P_f$  corresponde a la ubicación sobre el playón donde debe descargarse el contenedor.



**Figura. [9.3].** Vista en planta de la operación que debe realizar la grúa torre.

Las coordenadas cilíndricas de ambos puntos son:  $P_i(36m, 60^\circ, 10m)$  y  $P_f(45m, 210^\circ, 5m)$ .

**9.a.** Realice la transformación de las coordenadas, de un sistema cilíndrico a un sistema rectangular, correspondientes a los puntos  $P_i$  y  $P_f$ .

Tenemos en cuenta las ecuaciones de transformación de coordenadas de cilíndricas a rectangulares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{cases} x_i = 36 \cos 60^\circ = 18.00m \\ y_i = 36 \operatorname{sen} 60^\circ = 31.18m \\ z_i = 10m \end{cases} \quad [9.1.]$$

$$\begin{cases} x_f = 45 \cos 210^\circ = -38.97m \\ y_f = 45 \operatorname{sen} 210^\circ = -22.5m \\ z_f = 5m \end{cases} \quad [9.2.]$$

Así, tenemos que las coordenadas de los puntos resultan:  $P_i(18.0, 31.18, 10) [m]$  y  $P_f(-38.97, -22.5, 5) [m]$ .

**9.b.** Encuentre el recorrido óptimo que debería realizar el gancho, para posicionar el contenedor desde la posición  $P_i$  a  $P_f$ .

El recorrido óptimo corresponde a la distancia mínima entre  $P_i$  y  $P_f$ . La calculamos como el módulo del vector  $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_f$

$$d(P_iP_f) = \|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_f\| = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2} \quad [9.3.]$$

$$= \sqrt{(-38.97 - 18)^2 + ((-22.5) - 31.18)^2 + (5 - 10)^2} = 78.44 \text{ m} \quad [9.4.]$$

Por lo tanto, el recorrido óptimo es la distancia  $d(P_iP_f) = 78.44\text{m}$ .

**9.c.** Encuentre el ángulo entre la dirección de  $P_i$  y  $P_f$ .

Para determinar el ángulo entre las dos direcciones, se debe hallar los vectores  $\mathbf{OP}_i$  y  $\mathbf{OP}_f$ , para luego determinar el ángulo entre ellos aplicando el concepto de producto escalar.

$$\mathbf{OP}_i \cdot \mathbf{OP}_f = \|\mathbf{OP}_i\| \cdot \|\mathbf{OP}_f\| \cdot \cos\alpha \quad [9.5.]$$

Las componentes de los vectores son:

$$\mathbf{OP}_i = (x_i - x_o, y_i - y_o, z_i - z_o) = (18.0, 31.18, 10) \text{ [m]} \quad [9.6.]$$

$$\mathbf{OP}_f = (x_f - x_o, y_f - y_o, z_f - z_o) = (-38.97, -22.5, 5) \text{ [m]} \quad [9.7.]$$

Sus módulos están dados por:

$$\|\mathbf{OP}_i\| = \sqrt{18^2 + 31.18^2 + 5^2} = 37.37\text{m} \quad [9.8.]$$

$$\|\mathbf{OP}_f\| = \sqrt{(-38.97)^2 + (-22.5)^2 + 10^2} = 45.28\text{m} \quad [9.9.]$$

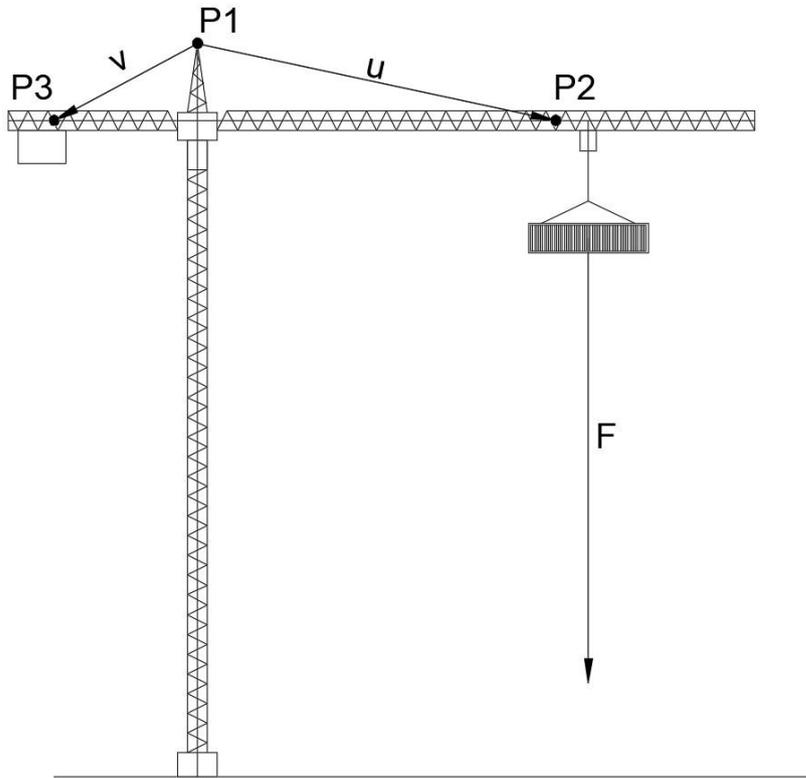
Por lo tanto, el ángulo buscado está dado por:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{OP}_i \cdot \mathbf{OP}_f}{\|\mathbf{OP}_i\| \cdot \|\mathbf{OP}_f\|} = -0.799 \quad [9.10.]$$

De la ecuación [9.10] se obtiene que  $\alpha = 143^\circ$ .

**9.d.** Determine la proyección del vector fuerza dado por el peso del contenedor, en la dirección de los dos tensores superiores de la grúa.

Para determinar la proyección del vector fuerza en cada una de las direcciones de los tensores, se deben hallar los vectores en dichas direcciones (Figura [9.4]).



**Figura. [9.4].**  
Vector fuerza  $F$  y  
vectores  $u$  y  $v$ , que  
dan la dirección de  
los tensores.

Las coordenadas rectangulares de los puntos en cada extremo de los tensores son  $P_1(0,0,74.2)[m]$ ,  $P_2(36,0,66.4)[m]$  y  $P_3(-14.4,0,66.4)[m]$ .

El primer tensor está comprendido entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  y su dirección está dada por el vector  $u$ , cuyas componentes y módulo son:

$$u = P_1P_2 = (36 - 0, 0 - 0, 66.4 - 74.2) = (36, 0, -7.8)[m] \quad [9.11.]$$

$$\|u\| = \sqrt{36^2 + 0^2 + (-7.8)^2} = 36.84m \quad [9.12.]$$

De manera análoga, el segundo tensor está comprendido entre los puntos  $P_1$  y  $P_3$  y su dirección está dada por el vector  $v$ , cuyas componentes y módulo son:

$$v = P_1P_3 = (-14.4 - 0, 0 - 0, 66.4 - 74.2) = (-14.4, 0, -7.8)[m] \quad [9.13.]$$

$$\|v\| = \sqrt{(-14.4)^2 + 0^2 + (-7.8)^2} = 16.38m \quad [9.14.]$$

Dado que corresponde al peso del contenedor, el vector fuerza  $\mathbf{F}$  es vertical y con dirección hacia abajo. Sus componentes son, entonces:

$$\mathbf{F} = (0,0,-4500) [kg] \quad [9.15.]$$

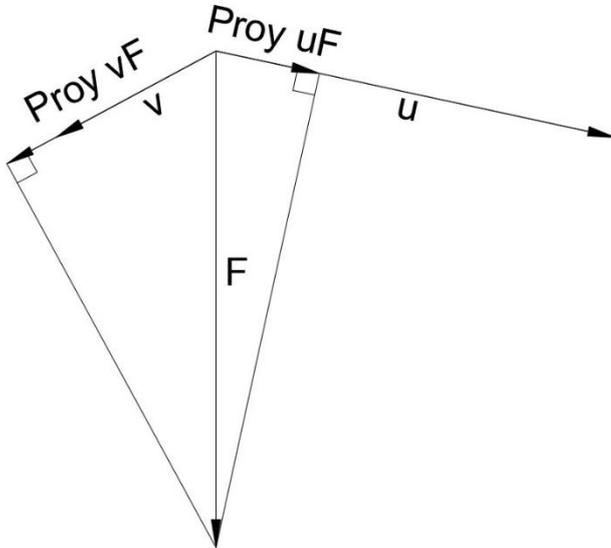
Finalmente, las proyecciones buscadas están dadas por las siguientes expresiones:

$$\text{Proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{(0,0,-4500) \cdot (36,0,-7.8)}{36.84} = 952.77kg \quad [9.16.]$$

$$\text{Proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(0,0,-4500) \cdot (-14.4,0,-7.8)}{16.38} = 2142.86kg \quad [9.17.]$$

**9.e.** ¿Varía el vector proyección en la dirección de cada uno de los tensores, si cambia la elevación, ángulo o distancia del gancho?

En la Figura [9.5] se muestran los vectores  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  con el mismo punto de origen, como así los vectores proyección correspondientes. Determinamos dichos vectores.



**Figura. [9.5].**  
Vector fuerza  $\mathbf{F}$ ,  
vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , y  
vectores  
proyección.

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{F} &= \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = 952.77 \cdot \frac{(36,0,-7.8)}{36.84} \\ &= (931.03,0,-201.72)[kg] \end{aligned} \quad [9.18.]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Proy}_v \mathbf{F} &= \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = 2142.86 \cdot \frac{(-14.4, 0, -7.8)}{16.38} \\ &= (-1883.83, 0, -1020.41)[kg] \end{aligned} \quad [9.19.]$$

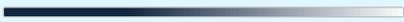
Observamos que, en ambos casos, los vectores proyección no varían ante los cambios de la elevación, ángulo o distancia del gancho, puesto solo dependen de la dirección y sentido del vector fuerza  $\mathbf{F}$  y de los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  respectivamente. Estos vectores no dependen de la posición del gancho.

## 3.4.

### Problema 10. Configuraciones de robots industriales.

A los efectos de estudiar la cinemática de un sistema de automatización, es necesario describir las posiciones de la herramienta terminal de robots industriales dados por distintos tipos de configuraciones.

**Área Temática:** Ingeniería. Robótica.

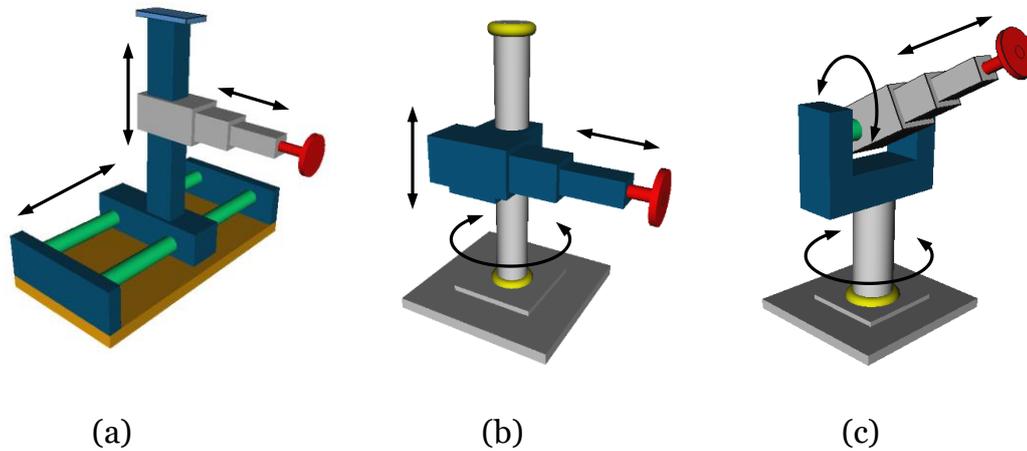
**Nivel:** INTERMEDIO 

#### Descripción del problema.

Un robot industrial es un sistema electromecánico programable capaz de realizar de manera autónoma determinadas operaciones dentro de un proceso industrial. Sus principales componentes son [Reyes, 2011]:

- a) Sistema mecánico, constituido por una secuencia de eslabones rígidos de metal u otro material, conectados por medio de articulaciones, en forma de cadena abierta. En el extremo se ubica el efector terminal o herramienta, que es el dispositivo adecuado para realizar una operación específica.
- b) Articulaciones, que consisten en servomotores que permiten el movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos. Pueden ser del tipo rotacional (para las cuales el movimiento se mide en grados o radianes) o lineal/prismática (cuyo movimiento se mide en unidades de longitud). El rango articular indica las posiciones extremas entre las que se puede mover cada articulación. El conjunto de los rangos de todas las articulaciones determina el alcance que tendrá el robot.
- c) Sensores, que brindan información sobre el estado del robot, por ejemplo: posición y velocidad articular, sensores de fuerza, cámaras de video, entre otros.
- d) Consola de control, que consiste en un sistema electrónico que suministra energía al robot para su funcionamiento. Además, contiene los algoritmos de control que lo guían, y la interfaz necesaria para que el usuario se comunique con el robot mediante instrucciones de programación.

Dependiendo de su configuración, la estructura básica del robot puede ser del tipo cartesiana, cilíndrica, polar, o bien otras configuraciones combinadas más complejas. La Figura [10.1.] muestra un esquema de dichas configuraciones.



**Figura. [10.1].** Configuraciones de robots: a) cartesiana; b) cilíndrica; c) polar.

**10.a.** Seleccione un sistema coordinado adecuado para describir la posición de la herramienta terminal de un robot, para el tipo de configuración cilíndrica y polar.

### Desarrollo de la solución.

#### Configuración cilíndrica:

Se utiliza un sistema de coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ , con origen en la base del robot. La coordenada  $\rho$  mide en unidades de longitud la posición de la articulación prismática horizontal que permite alejar o acercar la herramienta. La coordenada  $\theta$  mide en radianes (o grados, según convención) la posición de la articulación rotacional, que rota respecto al eje vertical que pasa por la base del robot. La coordenada  $z$  mide en unidades de longitud la posición de la articulación prismática vertical, que permite elevar o descender la herramienta. Así, la posición del órgano terminal está dada por:

$$P(\rho, \theta, z) \begin{cases} \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} \\ \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} \\ z_{\min} \leq z \leq z_{\max} \end{cases} \quad [10.1.]$$

**Configuración polar:**

Se utiliza un sistema de coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \varphi)$ , con origen en la articulación principal del robot, que permite la rotación respecto a dos ejes. La coordenada  $\rho$  mide en unidades de longitud la posición de la articulación prismática que permite alejar o acercar la herramienta. La coordenada  $\theta$  mide en radianes (o grados) la rotación respecto al eje vertical que pasa por la base del robot. La coordenada  $\varphi$  mide en radianes (o grados) la rotación respecto a un eje horizontal y perpendicular al brazo prismático. En otras palabras,  $\varphi$  mide el ángulo entre el brazo prismático y el eje vertical. Así, la posición de la herramienta terminal está dada por:

$$P(\rho, \theta, \varphi) \quad \begin{cases} \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} \\ \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} \\ \varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max} \end{cases} \quad [10.2.]$$

**10.b.** Consideramos un robot de configuración cilíndrica, cuyo alcance está dado

$$\text{por: } \begin{cases} 0.5m \leq \rho \leq 3m \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \\ 0m \leq z \leq 3m \end{cases}$$

La herramienta terminal está ubicada en el punto de coordenadas  $P_1 \left( 2.7, \frac{\pi}{6}, 0.5 \right)$ .

Indique la posición final del mismo si el brazo prismático retrocede 1.5m y sube 2m, mientras que rota en  $\frac{\pi}{4}$  radianes (sentido positivo).

Las coordenadas del punto final estarán dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \rho_1 + \Delta\rho = 2.7m - 1.5m = 1.2m \\ \theta_2 &= \theta_1 + \Delta\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{10}{24}\pi \\ z_2 &= z_1 + \Delta z = 0.5m + 2m = 2.5m \end{aligned} \quad [10.3.]$$

$$P_2 \left( 1.2, \frac{10\pi}{24}, 2.5 \right) \quad [10.4.]$$

**10.c.** En un robot de configuración polar, cuyo alcance está dado por:

$$\begin{cases} 0.5m \leq \rho \leq 2m \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \pi/12 \leq \varphi \leq 11\pi/12 \end{cases},$$

el órgano terminal está ubicado en el punto de coordenadas  $P_1 \left(0.5, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ . Indique la posición final del mismo si el brazo prismático se extiende en 2 unidades, rota horizontalmente en  $-\frac{\pi}{4}$  radianes y se eleva en  $\frac{\pi}{6}$  radianes.

Las coordenadas del punto final estarán dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \rho_1 + \Delta\rho = 0.5m + 2m = 2.5m \\ \theta_2 &= \theta_1 + \Delta\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + \Delta\varphi = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \quad [10.5.]$$

Notar que  $\Delta\varphi = -\pi/6$  tiene signo negativo, puesto que una elevación del brazo implica una disminución del ángulo entre éste y la vertical.

$$P_2 \left(2.5, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right) \quad [10.6.]$$

**10.d.** En una fábrica automotriz, se utiliza un robot de configuración cilíndrica para el proceso de pintado de carrocería. El panel a pintar se encuentra apoyado a una distancia de 1,5m de la base del robot, y está inclinado a  $45^\circ$  respecto del plano horizontal. Sus medidas son  $a=1m$  de ancho y  $b=1m$  de largo. Considerando que el difusor de pintura se debe mantener a una distancia constante de 0,15m de la superficie a pintar, obtenga una expresión para describir las posiciones por las que se mueve el difusor de pintura.

Tomamos un sistema de referencia cartesiano con origen de coordenadas sobre la base del robot, eje  $x$  paralelo a la base del panel, eje  $z$  sobre el eje vertical del robot. El lugar geométrico que ocupa el panel a pintar está dado por un plano  $\pi$  con vector normal  $\mathbf{n} = (0, -1, 1)$ , y que pasa por el punto  $Q(0, 1.5, 0)m$ .

$$\pi: -y + z + 1.5 = 0 \quad [10.7.]$$

La coordenada  $y$  varía entre  $y_1 = 1.5m$  correspondiente a la posición de la base del

panel, e  $y_2 = y_1 + a \cos 45^\circ = 1.5m + 0.71m = 2.21m$  correspondiente al otro extremo del panel.

La coordenada  $z$  varía entre  $z_1 = 0m$  correspondiente a la posición de la base del panel, y  $z_2 = a \sin 45^\circ = 0.71m$  correspondiente al extremo superior del panel.

$$\left\{ \begin{array}{l} -y + z + 1.5 = 0 \\ -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 1.5 \leq y \leq 2.21 \\ 0 \leq z \leq 0.71 \end{array} \right. \quad [10.8.]$$

Los vértices del panel están dados por los puntos  $A(-0.5, 1.5, 0)$ ,  $B(0.5, 1.5, 0)$ ,  $C(-0.5, 2.21, 0.71)$  y  $D(0.5, 2.21, 0.71)$ .

El difusor debe moverse en un plano paralelo al panel, manteniendo una distancia de 0.15m con el mismo. Entonces, el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y, z)$  que guardan esa distancia con el plano  $\pi$  está dado por:

$$\frac{|-y + z + 1.5|}{\|\mathbf{n}\|} = 0.15 \quad [10.9.]$$

$$-y + z + 1.5 = \pm 0.15\sqrt{2} \quad [10.10.]$$

Observamos que esta expresión corresponde a dos posibles planos, según el signo del segundo miembro, uno por delante del panel y otro por detrás. El difusor de pintura debe moverse por delante del panel, plano para el cual la proyección ortogonal entre los vectores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{QP}$  tiene signo positivo. Entonces:

$$\pi_2: -y + z + 1.5 = 0.15\sqrt{2} \quad [10.11.]$$

$$\pi_2: -y + z + 1.29 = 0 \quad [10.12.]$$

Para encontrar los vértices que limitan la región por la que debe moverse el difusor, tomamos las intersecciones entre  $\pi_2$  y cuatro rectas paralelas con vector director  $\mathbf{n}$ , y que pasan por los puntos A, B, C y D respectivamente. Se muestra el desarrollo para la recta  $L_1$  que pasa por el punto A. Los restantes cálculos se dejan como ejercicio para el lector:

$$L_1: (x, y, z) = \mathbf{OA} + t_1\mathbf{n} = (-0.5, 1.5, 0) + t_1(0, -1, 1), \quad t_1 \in \mathbb{R} \quad [10.13.]$$

$$A': L_1 \cap \pi_2: \begin{cases} x = -0.5 \\ y = 1.5 - t_1 \\ z = t_1 \\ -y + z + 1.29 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-0.5, 1.40, 0.11) \quad [10.14.]$$

Por un procedimiento similar, se obtienen los puntos  $B'(0.5, 1.40, 0.11)$ ,  $C'(-0.5, 2.11, 0.82)$ ,  $D'(0.5, 2.11, 0.82)$ . Calculamos también el punto  $Q'(0, 1.40, 0.11)$ .

Por lo tanto, la región por la que se mueve el difusor queda definida por:

$$\begin{cases} -y + z + 1.29 = 0 \\ -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 1.40 \leq y \leq 2.11 \\ 0.11 \leq z \leq 0.82 \end{cases} \quad [10.15.]$$

Tomamos las siguientes ecuaciones de conversión de coordenadas cartesianas a cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}; \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = y/x \\ z = z \end{cases} \quad [10.16.]$$

El intervalo de variación de la variable  $\theta$  está determinado por los puntos  $A'$  y  $B'$ , para los cuales la rotación es extrema:

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= \arctan\left(\frac{y_{B'}}{x_{B'}}\right) \approx 70^\circ, \theta_{\max} = \arctan\left(\frac{y_{A'}}{x_{A'}}\right) \\ &\approx -70^\circ + 180^\circ = 110^\circ \end{aligned} \quad [10.17.]$$

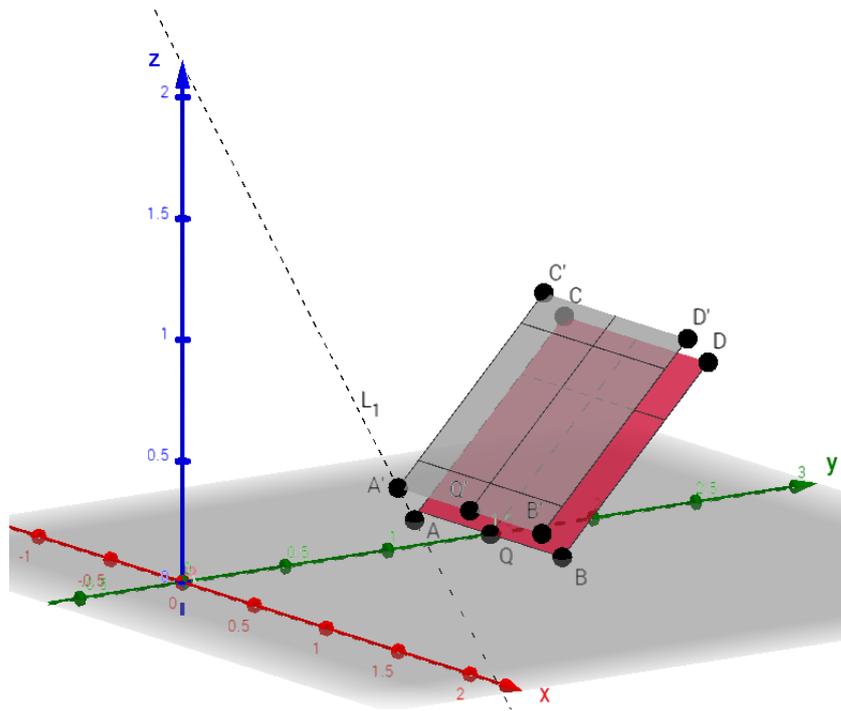
El intervalo de variación de la variable  $\rho$  está determinado por los puntos  $Q'$  y  $C'$  (o  $D'$ ):

$$\rho_{\min} = \sqrt{x_{Q'}^2 + y_{Q'}^2} = 1.40, \rho_{\max} = \sqrt{x_{C'}^2 + y_{C'}^2} = 2.17 \quad [10.18.]$$

Entonces, las coordenadas de los puntos por los cuales se mueve el difusor quedan determinadas por:

$$\begin{cases} -\rho \sin \theta + z + 1.29 = 0 \\ 1.40 \leq \rho \leq 2.17 \\ 70^\circ \leq \theta \leq 110^\circ \\ 0.11 \leq z \leq 0.82 \end{cases} \quad [10.19.]$$

La Figura [10.2] muestra el plano de movimiento que debe describir el difusor.



**Figura. [10.2].** Plano de movimiento del difusor.

## REFERENCIAS

- Aparicio, J. J.; (1995). *El conocimiento declarativo y procedimental que encierra una disciplina y su influencia sobre el método de enseñanza*. Tarbiya: Revista de Investigación e Innovación Educativa, (10), 23-40.
- Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina*. Recuperado de [https://confedi.org.ar/download/documentos\\_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf](https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf). Fecha de consulta: 10-12-2021.
- Downs, J.W.; *Practical Conic Sections* Dover Publications. Edición 2003.
- Estrada, L.A.; (2011). *Localización de epicentros*, Cátedra de Geofísica, Universidad Nacional de Tucumán.
- Felder R., Brent S.; (2003). *Learning by doing*. En: Chemical Engineering Education. [Online]. 3 (4). 282-283. <http://www.ncsu.edu/felder-public/Colums/Active.pdf>. Fecha de consulta: 10-12-2021.
- Felder R., Brent R.; (2007). *Cooperative Learning*. En: Active Learning: Models from the Analytical Sciences, P.A. Mabrouk, (ed.), Chapter 4. American Chemical Society. Symposium Series 970.
- Fuller, G., Tarwater, D.; *Geometría Analítica*. Addison Wesley Iberoamericana. Edición 1999.
- GeoGebra. <https://www.geogebra.org> Programa Dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Fecha de consulta: 10-12-2021.
- Molina V., Prieto Castillo D.; (1997). *El Aprendizaje en la Universidad*. Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza, Argentina.
- Perkins D.; (1999). *¿Qué es la Comprensión?* En: La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la Práctica. Compiladora: Stone Wiske, M. Editorial PAIDÓS. Colección Redes de Educación. Buenos Aires, Argentina.
- Programa de la asignatura Geometría Analítica; (2021). Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina. [http://fing.uncu.edu.ar/catedras/geometria\\_analitica](http://fing.uncu.edu.ar/catedras/geometria_analitica) .
- Raichman, S., Totter, E., (2008). *Aula-Taller de Geometría Analítica en Carreras de Ingeniería*. Latin American and Caribbean Journal of Engineering Education, Vol. 2, N° 1, pp. 7-12, LACJEE, ISSN 1935-0295.
- Raichman, S., Sabulsky, G., Totter, E.; (2013). *Estrategias para el desarrollo de innovaciones educativas basadas en la utilización de Tecnologías de la Información y Comunicación*. En “Estrategias para el uso de tecnologías de

- información y comunicación en los procesos de aprendizaje”, Orta, M., Verdejo, P (eds.). Innova Cesal, México.
- Raichman S. Totter, E. Gargiulo H., Videla D.; (2014). *Aula-taller de Geometría Analítica en el marco de formación basada en competencias y su impacto en la permanencia de estudiantes de primer año en ingeniería*, Cuartas Jornadas Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas, IPECYT 2014, Eje 3. ISBN: 978-987-3662-01-0, <http://redipecyt.fceia.unr.edu.ar/trabajos/E3069-Raichman.pdf>. Universidad Nacional de Rosario.
- Raichman, S., Totter, E.; (2016). *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*. Edición digital. Universidad Nacional de Cuyo. 220 páginas. Fecha de edición: Febrero de 2016. ISBN: 978-987-575-125-5. Dirección URL del libro: <http://bdigital.uncu.edu.ar/7224>. Fecha de consulta del libro: 10-12-2021.
- Raichman, S., Cerezo, V., Barbini, M., (2017). *Integración de ayudantes alumnos en las Aulas Taller de Geometría Analítica*. IX Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería (EnIDI 2017). Eds.: Gitto J., Mercado G., Zaradnik R. Vol. 1. pp. 205-209, ISBN 978-987-575-185-9. <http://enidi.frm.utn.edu.ar/index.php/actas-enini-2017/Mendoza>.
- Raichman, S., Pacini, E., (2017). *Intervención educativa de articulación entre las asignaturas Introducción a la Programación y Geometría Analítica*, IX Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería (EnIDI 2017), Eds.: Gitto J., Mercado G., Zaradnik R. Vol. 1. pp. 194-198, ISBN 978-987-575-185-9. <http://enidi.frm.utn.edu.ar/index.php/actas-enini-2017/> Mendoza.
- Raichman, S., Mirasso, A.; (2018). *Modelos pedagógicos para el aprendizaje complejo y la formación en competencias en carreras de Ingeniería*. Ingeniería – Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán, Vol. 22, No. 3, pp. 15-25 ISSN: 2448 - 8364. Fecha de consulta: 10-12-2021. <http://www.revista.ingenieria.uady.mx/ojs/index.php/ingenieria/article/view/127>
- Raichman, S., Totter, E., Videla, D., Collado, L., Codina, F., Molina, G., Cascone, I., (2018). *Recursos didácticos para el aprendizaje complejo de la Geometría Analítica*. I Jornada de Divulgación de la Carrera de Ingeniería Civil, Mendoza. <http://bdigital.uncu.edu.ar/10949>. Fecha de consulta: 10-12-21.
- Raichman, S., Totter, E., Videla, D., Collado, L., Codina, F., Molina, G., Cascone, A., Fitt, G., (2020). *Geometría analítica para Ciencias e Ingenierías: actividades para el aprendizaje* 1a. edición ilustrada. Mendoza, Argentina: Universidad Nacional de Cuyo. 100 p.; ISBN 978-987-575-209-2 Dirección URL del libro: <http://bdigital.uncu.edu.ar/13947>. Fecha de consulta del libro: 10-12-2021.
- Raichman, S., Totter, E., Fitt, G, Codina, F., Molina G., Cascone A.; (2021). *Geometría Dinámica para Ciencias e Ingenierías*. Libro Interactivo GeoGebra para el estudio de la Geometría Analítica para Ciencias Exactas, Ingeniería y

- Arquitectura. <https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju>. Fecha de consulta del libro: 10-12-2021.
- Reyes, F.; *Robótica – control de robots manipuladores*. Editorial Alfaomega. Grupo Editor. Edición 2011.
- Romeo, A.; (2011). *Morfología de los Robots industriales*. Tutorial web disponible en: <http://www.infopl.net/documentacion/22-robotica/42-morfologia-robots-industriales> Fecha de consulta: 10-12-2021.
- Thorne Lay; Terry C. Wallace; “*Modern Global Seismology*”, Academic Press, 1995.
- Totter, E., Raichman, S.; (2009). *Creación de espacios virtuales de aprendizaje en el área Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería*. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, ISSN 1850-9959. Vol. 4, pp. 40-46, <http://teyet-revista.info.unlp.edu.ar/numero-4.htm>. La Plata, Octubre de 2009.
- Trias Pairó, J.; *Geometría para la Informática Gráfica y CAD*. Editorial Alfaomega. Edición 2005.
- Udías Vallina, A.; Mézcua Rodríguez, J; “*Fundamentos de sismología*”. UCA Editores. El Salvador, 1997. Fecha de consulta: 10-12-2021. <http://contenidos.inpres.gov.ar/docs/C%C3%A1culo%20del%20epicentro.pdf> Fecha de consulta: 10-12-2021.
- Verdejo, P; Freixas, R. *Educación para el pensamiento complejo y competencias: Diseño de tareas y experiencias de aprendizaje*. Aseguramiento de la Calidad en la Educación y en el Trabajo. Innova Cesal. S.C. México. Abril de 2009.

# Geometría Analítica

para Ciencias e Ingenierías

## *Problemas Integradores y de Aplicación*

ISBN 978-987-4026-62-0

EDICIÓN ARGENTINA